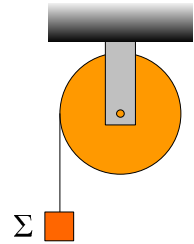


ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ: ΤΡΟΧΑΛΙΑ και ΓΙΟ-ΓΙΟ

1) Γύρω από μια τροχαλία ακτίνας R και μάζας M έχουμε τυλίξει ένα αβαρές νήμα, στο άκρο του οποίου δένουμε ένα σώμα Σ , μάζας $m=M/2$, το οποίο συγκρατούμε σε ύψος h από το έδαφος. Σε μια στιγμή ($t=0$) αφήνουμε το σώμα Σ να πέσει. Το σχοινί δε γλιστρά στο αυλάκι της τροχαλίας.



Δίνεται η ροπή αδράνειας της τροχαλίας ως προς τον άξονά της:

$$I = \frac{1}{2} MR^2 \text{ και η επιτάχυνση της βαρύτητας } g$$

α) Να σχεδιάσετε τις δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα Σ και στην τροχαλία.

β) Να αποδείξετε ότι η επιτάχυνση του σώματος Σ συνδέεται με την γωνιακή επιτάχυνση της τροχαλίας με τη σχέση $a = \alpha_{\text{γων}} R$.

γ) Να υπολογίσετε την επιτάχυνση a του σώματος Σ και την τάση του νήματος T

δ) Να γίνουν οι γραφικές παραστάσεις της γωνιακής ταχύτητας της τροχαλίας και της δύναμης που δέχεται από τον άξονα, σε συνάρτηση με το χρόνο, για το χρονικό

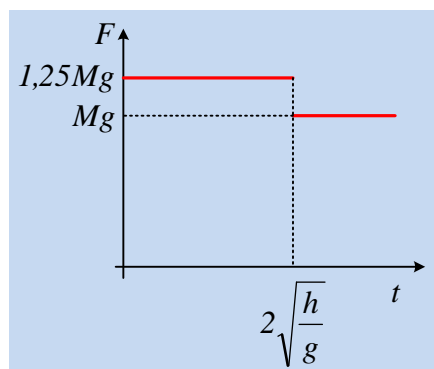
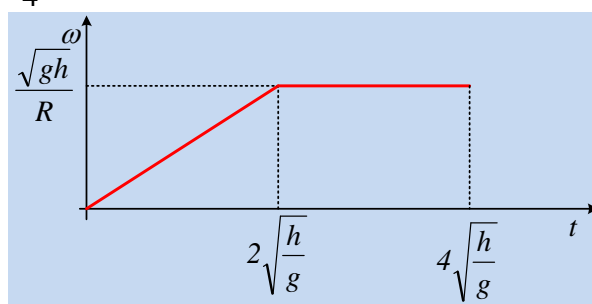
διάστημα: $0 \leq t \leq 4\sqrt{\frac{h}{g}}$ Ποιο το ελάχιστο μήκος του νήματος που πρέπει να είναι

τυλιγμένο στην τροχαλία, ώστε να ξετυλίγεται στο παραπάνω χρονικό διάστημα:

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: γ) $a = \frac{g}{2}$, $T = \frac{Mg}{4}$ δ) τη στιγμή $t_1 = 2\sqrt{\frac{h}{g}}$ που το σώμα Σ φθάνει στο

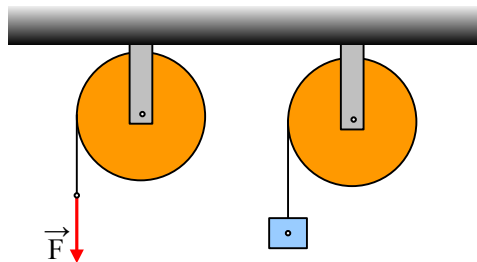
έδαφος το νήμα λυγίζει, οπότε δεν ασκεί πλέον δύναμη στην τροχαλία, οπότε αυτή συνεχίζει να στρέφεται με σταθερή $\omega = \frac{\sqrt{gh}}{R}$, ενώ η δύναμη του άξονα μειώνεται από

την τιμή $F_1 = \frac{5}{4}Mg$, στην τιμή $F_2 = Mg$



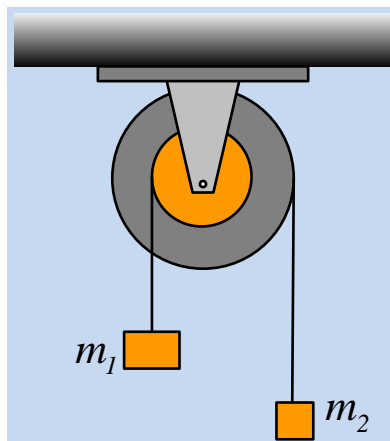
Το ελάχιστο μήκος του τυλιγμένου νήματος θα είναι ίσο με το μήκος του τόξου που αντιστοιχεί στη γωνιακή μετατόπιση: $l = \Delta s = R\Delta\varphi$, όπου η γωνιακή μετατόπιση είναι ίση με το εμβαδό του τραπεζίου στο διάγραμμα $\omega=f(t)$: $\Delta\varphi = \frac{3h}{R}$ Άρα: $l = 3h$

2) Γύρω από μια τροχαλία τυλίγουμε ένα αβαρές νήμα, στο άκρο του οποίου ασκούμε κατακόρυφη δύναμη F . Η τροχαλία αποκτά γωνιακή επιτάχυνση $a_{\gamma\omega\nu}$. Αν στο άκρο του νήματος δέσουμε ένα σώμα βάρους $W = F$, η γωνιακή επιτάχυνση της τροχαλίας θα είναι ίση, μεγαλύτερη ή μικρότερη από την $a_{\gamma\omega\nu}$; Αιτιολογείστε



ΑΠΑΝΤΗΣΗ: $a'_{\gamma\omega\nu} = \frac{TR}{I} < \frac{FR}{I} = a_{\gamma\omega\nu}$, αφού $T < F = W$

3) Μια διπλή τροχαλία αποτελείται από δύο τροχαλίες που έχουν κοινό άξονα. Η μικρή τροχαλία έχει ακτίνα r ενώ η μεγάλη $R=2r$. Η συνολική ροπή αδράνειας της διπλής τροχαλίας ως προς τον άξονα περιστροφής είναι I . Γύρω από κάθε τροχαλία είναι τυλιγμένο αβαρές σχοινί το οποίο δε γλιστρά στο αυλάκι της τροχαλίας. Στα ελεύθερα άκρα των δύο σχοινιών είναι δεμένα δύο σώματα με μάζες m_1 και m_2 . Το σώμα m_1 στο σχοινί της μικρής τροχαλίας και το σώμα m_2 στο σχοινί της μεγάλης τροχαλίας.



Κάποια στιγμή αφήνουμε το σύστημα ελεύθερο. Θεωρείστε γνωστή την επιτάχυνση της βαρύτητας g .

α) Για ποιες τιμές της μάζας m_1 , η τροχαλία στρέφεται έτσι ώστε το σώμα m_1 να

κατεβαίνει και το σώμα m_2 να ανεβαίνει;

β) Ποια σχέση συνδέει τις επιταχύνσεις a_1 και a_2 των δύο μαζών;

γ) Ποια η γωνιακή επιτάχυνση της τροχαλίας;

δ) Ποιος ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής του συστήματος διπλή τροχαλία-μάζες;

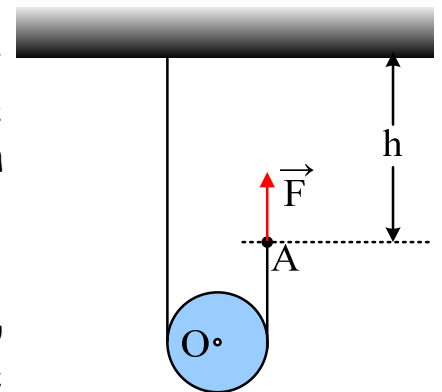
ΑΠΑΝΤΗΣΗ: α) $m_1 > 2m_2$ β) $\frac{a_1}{a_2} = \frac{r}{R} = \frac{1}{2}$

$$m_1 g - T_1 = m_1 a_{\gamma\omega\nu} r$$

γ) $T_2 - m_2 g = m_2 a_{\gamma\omega\nu} R \Rightarrow a_{\gamma\omega\nu} = \frac{m_1 - 2m_2}{m_1 + 4m_2 + \frac{I}{r^2}} \cdot \frac{g}{r}$ δ) $\frac{dL_{ολ}}{dt} = (m_1 - 2m_2) g r$

$$T_1 - 2T_2 = I \frac{a_{\gamma\omega\nu}}{r}$$

4) Η τροχαλία του σχήματος έχει μάζα M , ακτίνα R και ηρεμεί όπως στο σχήμα, όπου ένα αβαρές νήμα έχει περαστεί στο αυλάκι της. Το ένα άκρο του νήματος έχει δεθεί σε οροφή, ενώ στο άλλο του άκρο A ασκείται κατακόρυφη δύναμη \vec{F} .



A) Δείξτε ότι: $F = \frac{Mg}{2}$

B) Κάποια στιγμή ασκούμε κατακόρυφη δύναμη \vec{F}_1 , μέτρου $F_1 = W$, οπότε η τροχαλία κινείται προς τα πάνω με σταθερή επιτάχυνση κέντρου μάζας a_{cm}

I) Δείξτε ότι: $a_{cm} = a_{\gamma\omega\nu} R$

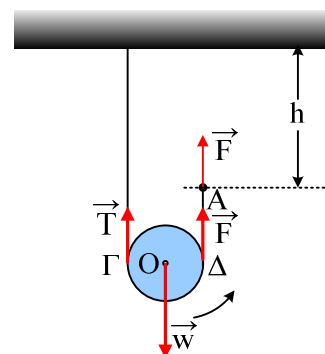
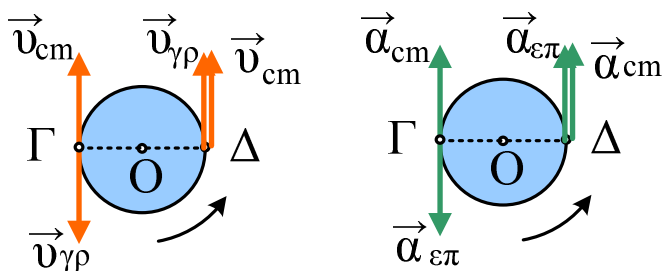
II) Δείξτε ότι η επιτάχυνση του άκρου A του νήματος έχει μέτρο: $a_A = \frac{4}{3} g$

III) Αν το άκρο A του νήματος ανέβει κατά h πόσο θα ανέβει το cm (O) της κινητής τροχαλίας;

Δίνεται η ροπή αδράνεια της τροχαλίας ως προς τον άξονά της: $I = \frac{1}{2} MR^2$

και η επιτάχυνση της βαρύτητας g .

ΑΠΑΝΤΗΣΗ



$$v_{\Gamma} = 0 \Rightarrow v_{cm} = \omega R \Rightarrow a_{cm} = a_{\gamma\omega\nu} R$$

$$F + T - W = Ma_{cm}$$

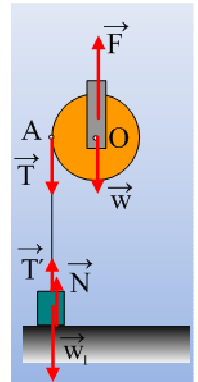
$$F - T = \frac{1}{2} Ma_{cm}$$

Το άκρο Α έχει διπλάσια επιτάχυνση από το κέντρο μάζας Ο της τροχαλίας, αφού:

$$a_A = a_{\Delta} = a_{cm} + a_{\varepsilon} = 2a_{cm} \text{ Οπότε: } h = 2y_o \Rightarrow y_o = \frac{h}{2}$$

5) Τροχαλία μάζας Μ και ακτίνας R συγκρατείται στον αέρα υπό την επίδραση κατακόρυφης δύναμης F που διέρχεται από τον άξονά της. Γύρω από την τροχαλία είναι τυλιγμένο πολλές φορές ιδανικό νήμα στο άλλο άκρο του οποίου είναι δεμένο σώμα μάζας m. Το νήμα είναι κατακόρυφο και μπορεί να ξετυλίγεται χωρίς να ολισθαίνει στο αυλάκι της τροχαλίας. Το σώμα μάζας m βρίσκεται πάνω σε οριζόντιο δάπεδο. Δείξτε ότι το σώμα μάζας m θα ανασηκωθεί από το έδαφος αν το μέτρο της κατακόρυφης δύναμης F λάβει τιμή: $F > (M+3m)g$

Δίνεται η ροπή αδράνεια της τροχαλίας ως προς τον άξονά της: $I = \frac{1}{2} MR^2$



ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Θεωρούμε ότι ασκούμε στην τροχαλία κατακόρυφη δύναμη F, μέτρου τέτοιου ώστε να κινηθεί κατακόρυφα προς τα πάνω. Ταυτόχρονα η τάση του τεντωμένου κατακόρυφου νήματος δημιουργεί ροπή ως προς τον άξονα της τροχαλίας. Έτσι η τροχαλία θα εκτελέσει **σύνθετη** κίνηση, η οποία εξετάζεται ως επαλληλία μιας μεταφορικής και μιας περιστροφικής κίνησης γύρω από τον άξονά της.

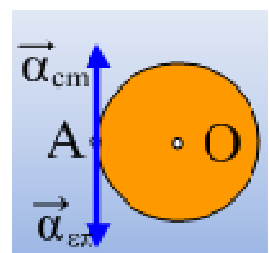
Κατά τη διάρκεια αυτής της κίνησης είναι δυνατόν το σώμα να μην ανασηκώνεται από το οριζόντιο δάπεδο. Αυτό θα συμβαίνει αν η μετατόπιση Δy του κέντρου Ο της τροχαλίας είναι ίση με το μήκος του νήματος που ξετυλίγεται: $\Delta y = \Delta s = R\Delta\phi$

Το σημείο Α στο οποίο το νήμα συναντάει την τροχαλία θεωρούμε ότι συμμετέχει στις δύο υποθετικές κινήσεις. Θεωρούμε λοιπόν, ότι έχει και μεταφορική επιτάχυνση a_{cm} και επιτρόχια επιτάχυνση

$$a_{\varepsilon} = \frac{d(\omega R)}{dt} = R \frac{d\omega}{dt} = Ra_{\gamma\omega\nu}$$

Όμως, εφόσον το σώμα μάζας m παραμένει στο έδαφος όλα τα σημεία του κατακόρυφου νήματος θα έχουν μηδενική ταχύτητα και μηδενική επιτάχυνση

$$\vec{a}_A = \vec{a}_{cm} + \vec{a}_{\varepsilon} \Rightarrow a_A = a_{cm} - a_{\varepsilon} = a_{cm} - a_{\gamma\omega\nu} R = 0 \Leftrightarrow a_{cm} = a_{\gamma\omega\nu} R(1)$$



Άρα:

$$\Sigma F = Ma_{cm} \Leftrightarrow F - Mg - T = Ma_{cm} \quad (2) \quad \text{και} \quad T = \frac{1}{2}Ma_{cm} \quad (3)$$

Διαιρώντας κατά μέλη τις (2) και (3) έχουμε:

$$\frac{F - Mg - T}{T} = 2 \rightarrow F - Mg = 3T \Rightarrow T = \frac{F - Mg}{3} \quad (4)$$

Εξάλλου για το σώμα μάζας m στο έδαφος ισχύει:

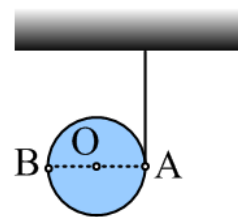
$$\Sigma F = 0 \rightarrow T + N = mg \rightarrow N = mg - T \quad (5)$$

Από την (4) προκύπτει πως όταν μεγαλώνει η F μεγαλώνει και η τάση του νήματος T οπότε από την (5) προκύπτει πως μειώνεται η N .

Για να μην ανασηκωθεί το σώμα πρέπει:

$$N \geq 0 \Leftrightarrow T \leq mg \Leftrightarrow \frac{F - Mg}{3} \leq mg \Leftrightarrow F \leq Mg + 3mg \Leftrightarrow F \leq (M + 3m)g$$

6) Γύρω από έναν ομογενή κύλινδρο μάζας M , έχουμε τυλίξει ένα αβαρές νήμα, το άκρο του οποίου έχει δεθεί σε οροφή, όπως στο σχήμα. Δίνεται η επιτάχυνση της βαρύτητας g , ενώ η ροπή αδράνειας του κυλίνδρου ως προς τον άξονά του δίνεται από τη σχέση $I = \frac{1}{2}MR^2$.

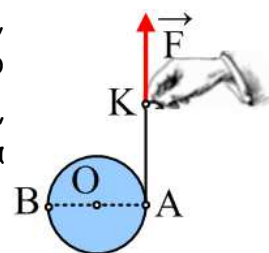


A) Σε μια στιγμή αφήνουμε ελεύθερο τον κύλινδρο να κινηθεί.

I) Να αποδείξετε ότι η επιτάχυνση του κέντρου μάζας του κυλίνδρου, συνδέεται με τη γωνιακή του επιτάχυνση με τη σχέση $a_{cm} = a_{γων}R$

II) Να υπολογίσετε την επιτάχυνση του άξονα του κυλίνδρου και την τάση του νήματος (Απάντηση: $a_{cm} = \frac{2g}{3}$, $T = \frac{Mg}{3}$)

B) Λύνουμε το σχοινί και κρατάμε με το χέρι μας το άκρο του K, συγκρατώντας τον κύλινδρο. Σε μια στιγμή αφήνουμε τον κύλινδρο ελεύθερο και ασκώντας στο άκρο K μια κατάλληλη δύναμη F , πετυχαίνουμε να στρέφεται ο κύλινδρος, αλλά χωρίς να μετακινείται ο άξονάς του.



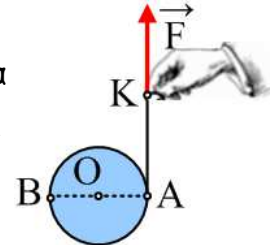
I) Να βρεθεί το μέτρο της δύναμης F

II) Να υπολογιστεί ο ρυθμός μεταβολής του μέτρου της ταχύτητας του σημείου B

ΙΙΙ) Υπολογίστε την επιτάχυνση με την οποία κινείται προς τα πάνω το ελεύθερο άκρο Κ του νήματος

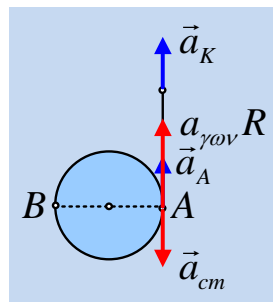
(Απάντηση: $F = Mg$, $\frac{dv}{dt} = a_\varepsilon = 2g$ $a_K = a_A = 2g$)

Γ) Αν το ελεύθερο άκρο του νήματος κινείται κατακόρυφα προς τα πάνω με επιτάχυνση μέτρου a_K να υπολογίσετε την επιτάχυνση a_{cm} του άξονα του κυλίνδρου .



Απάντηση:

Έστω ότι ο άξονας του κυλίνδρου κινείται κατακόρυφα προς τα κάτω



$$a_K = a_A = a_{\gamma\omega}R - a_{cm} \Rightarrow a_{\gamma\omega}R = a_K + a_{cm} \quad (1)$$

$$Mg - F = Ma_{cm}$$

$$F = \frac{1}{2}MRa_{\gamma\omega} \Rightarrow Mg = Ma_{cm} + \frac{1}{2}M(a_K + a_{cm}) \Rightarrow \dots \Rightarrow a_{cm} = \frac{2}{3}(g - \frac{a_K}{2}) \quad (2)$$

Από τη σχέση (2): Αν $a_K < 2g$ τότε $a_{cm} > 0$, δηλαδή όντως ο άξονας του κυλίνδρου κινείται κατακόρυφα προς τα κάτω.

Αν $a_K > 2g$ τότε $a_{cm} < 0$, οπότε ο άξονας του κυλίνδρου κινείται κατακόρυφα προς τα πάνω.

Θοδωρής Παπασγουρίδης

parasgou@gmail.com