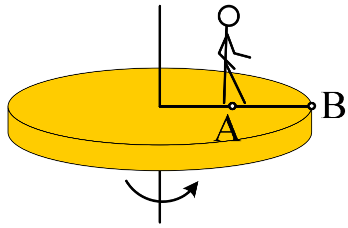
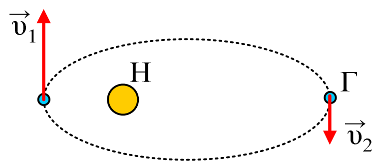
Φ.Ε: ΣΤΡΟΦΟΡΜΗ (μέρος ΙΙ)

1) Α) Άνθρωπος βρίσκεται πάνω στην επιφάνεια και **κοντά στο κέντρο** οριζόντιου δίσκου που περιστρέφεται με γωνιακή ταχύτητα ω_1 γύρω από κατακόρυφο άξονα κάθετο στο κέντρο του. Αν ο άνθρωπος μετακινηθεί στην περιφέρεια του δίσκου, ο δίσκος στρέφεται με γωνιακή ταχύτητα ω_2. Να συγκρίνετε τη γωνιακή του ταχύτητα ω_2 με την αρχική γωνιακή ταχύτητα ω_1 καθώς και τις κινητικές ενέργειες



Β) Σε ένα ακίνητο ρολόι που λειτουργεί **κανονικά**, ο λόγος της στροφορμής του λεπτοδείκτη (L_1) προς τη στροφορμή του ωροδείκτη (L_2), ως προς τον κοινό άξονα περιστροφής τους, είναι $L_1/L_2 = \lambda$, όπου λ θετική σταθερά. Να βρεθεί ο λόγος των κινητικών ενεργειών τους

Γ) Η τροχιά της Γης γύρω από τον Ήλιο είναι ελλειπτική. Όταν η Γη βρίσκεται στο περιήλιο η ταχύτητά της είναι υ_1 και η απόσταση από τον Ήλιο r_1, ενώ όταν βρίσκεται στο αφήλιο οι αντίστοιχες τιμές είναι υ_2 και r_2 με $r_2 = 4r_1$. Να βρεθεί ο λόγος: $\dfrac{\upsilon_1}{\upsilon_2}$



ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Α) $$L_1 = L_2 \Rightarrow I_1\omega_1 = I_2\omega_2 \Rightarrow \frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{I_1}{I_2} < 1 \Rightarrow \omega_2 < \omega_1$$

Για να συγκρίνουμε τις κινητικές ενέργειες θα βασιστούμε στο ότι η στροφορμή διατηρείται και η ροπή αδράνειας αυξάνεται:

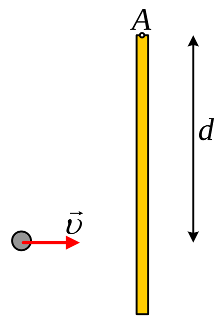
$$\frac{K_2}{K_1} = \frac{\dfrac{L^2}{2I_2}}{\dfrac{L^2}{2I_1}} = \frac{I_1}{I_2} < 1 \Rightarrow K_2 < K_1$$

Β) Για το λεπτοδείκτη T_1=1h και για τον ωροδείκτη T_2=12h, οπότε:

$$\frac{K_1}{K_2} = \frac{\frac{1}{2}L_1\omega_1}{\frac{1}{2}L_2\omega_2} = \frac{L_1}{L_2}\frac{\omega_1}{\omega_2} = \lambda\frac{\dfrac{2\pi}{T_1}}{\dfrac{2\pi}{T_2}} = \lambda\frac{T_2}{T_1} = 12\lambda$$

Γ) Η **τροχιακή** στροφορμή της Γης κατά την περιφορά της γύρω από τον Ήλιο **παραμένει σταθερή** επειδή η βαρυτική δύναμη που της ασκεί ο Ήλιος **δε** δημιουργεί ροπή **ως προς το κέντρο του Ήλιου**, άρα: $M_{\Gamma}\upsilon_1 r_1 = M_{\Gamma}\upsilon_2 r_2 \Rightarrow \frac{\upsilon_1}{\upsilon_2} = \frac{r_2}{r_1} = 4$

2) Ράβδος μήκους L και μάζας M μπορεί να στρέφεται ελεύθερα σε κατακόρυφο επίπεδο **γύρω από ένα στήριγμα** που βρίσκεται στο πάνω άκρο της Α. Ένα βλήμα μάζας m με ταχύτητα υ, χτυπάει τη ράβδο σε απόσταση d από το άκρο Α και σφηνώνεται σε αυτή. Το κέντρο μάζας του συστήματος ράβδος-βλήμα μετά την κρούση βρίσκεται σε απόσταση $x = \frac{md + M\frac{L}{2}}{m+M}$ από το άκρο Α. Να χαρακτηρίσετε ως σωστές ή λανθασμένες τις παρακάτω προτάσεις:



Α) Το σύστημα ράβδος-βλήμα μετά την κρούση στρέφεται σε κατακόρυφο επίπεδο γύρω από το στήριγμα που βρίσκεται στο άκρο Α με αρχική γωνιακή ταχύτητα:

$$\omega = \frac{3m\upsilon d}{ML^2 + 3md^2}$$

Β) Η ορμή του συστήματος ράβδος-βλήμα διατηρείται κατά την κρούση

Γ) Η ορμή του συστήματος ράβδος-βλήμα αμέσως μετά την κρούση δίνεται από τη σχέση:

$$p = (md + M\frac{L}{2})\omega$$

όπου ω η γωνιακή ταχύτητα του συστήματος ράβδος-βλήμα, αμέσως μετά την κρούση.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Α) Επειδή κατά την κρούση δεν αναπτύσσονται ροπές εξωτερικών δυνάμεων ως προς τον άξονα περιστροφής, που διέρχεται από το στήριγμα στο άκρο Α, διατηρείται η στροφορμή του συστήματος ράβδος-βλήμα κατά τον ίδιο άξονα:

$$L_{ολ(πριν)} = L_{ολ(μετα)} \Rightarrow m\upsilon d = (\frac{1}{12}ML^2 + M\frac{L^2}{4} + md^2)\omega \Rightarrow m\upsilon d = \frac{ML^2 + 3md^2}{3}\omega \Rightarrow$$

$$\omega = \frac{3m\upsilon d}{ML^2 + 3md^2}$$

Άρα η πρόταση είναι σωστή

Β) Στη διάρκεια της κρούσης το σύστημα **δεν** είναι μονωμένο, αφού ασκείται στη ράβδο η εξωτερική δύναμη από το στήριγμα στο Α. Άρα **δε διατηρείται** η ορμή του.

Γ) Θεωρούμε όλη τη μάζα του συστήματος ράβδος-βλήμα συγκεντρωμένη στο κέντρο μάζας, το οποίο εκτελεί κυκλική κίνηση γύρω από το άκρο Α, με γραμμική ταχύτητα:

$$\upsilon = \omega x = \omega\frac{md + M\frac{L}{2}}{M + m}$$

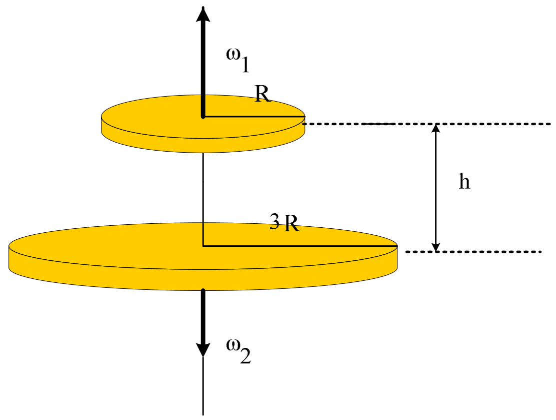
Η ορμή του συστήματος εκφράζεται:

$$p = (M + m)\upsilon = (M + m)\omega\frac{md + M\frac{L}{2}}{M + m} \Rightarrow p = (md + M\frac{L}{2})\omega$$

όπου $\omega = \frac{3m\upsilon d}{ML^2 + 3md^2}$, η γωνιακή ταχύτητα του συστήματος ράβδος-βλήμα, αμέσως μετά την κρούση. Άρα η πρόταση είναι σωστή.

3) Δύο ομογενείς δίσκοι από το ίδιο υλικό έχουν το ίδιο πάχος και ακτίνες R και 3R. Οι δίσκοι περιστρέφονται γύρω από τον ίδιο κατακόρυφο άξονα, ο οποίος διέρχεται από το κέντρο τους, με αντίθετη φορά. Ο μικρός δίσκος ακτίνας R, βρίσκεται σε ύψος h πάνω από μεγάλο ακτίνας 3R. Κάποια στιγμή ο μικρός αφήνεται να πέσει στο μεγάλο και ύστερα από μικρό χρονικό διάστημα παύουν να περιστρέφονται.
Να βρεθεί:

α) Ο λόγος των μέτρων των στροφορμών των δίσκων πριν έρθουν σε επαφή β) Ο λόγος των μέτρων των γωνιακών ταχυτήτων των δίσκων πριν έρθουν σε επαφή



γ) Ο λόγος των κινητικών ενεργειών των δίσκων πριν έρθουν σε επαφή είναι:

δ) Η θερμική ενέργεια που ελευθερώνεται από τη στιγμή που ο μικρός δίσκος αφήνεται ελεύθερος και μέχρι να σταματήσουν να περιστρέφονται

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

α) Οι δύο δίσκοι αποτελούν ένα σύστημα σωμάτων, στο οποίο δεν αναπτύσσονται ροπές εξωτερικών δυνάμεων. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα η στροφορμή του συστήματος να διατηρείται σταθερή. Άρα:

$$\vec{L}_{ο\lambda(\alpha\rho\chi)} = \vec{L}_{ο\lambda(\tau\varepsilon\lambda)} \Leftrightarrow 0 = \vec{L}_1 + \vec{L}_2 \Leftrightarrow 0 = L_1 - L_2 \Leftrightarrow L_1 = L_2 \Rightarrow \frac{L_1}{L_2} = 1$$

β) Εφόσον οι δίσκοι είναι κατασκευασμένοι από το ίδιο υλικό, ο λόγος των μαζών τους είναι ίσος με το λόγο των εμβαδών τους:

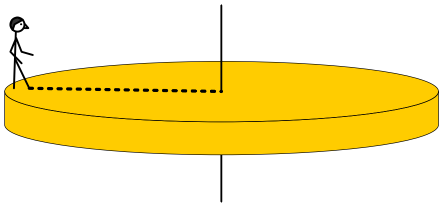
$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{d \cdot V_1}{d \cdot V_2} = \frac{S_1}{S_2} = \frac{\pi R^2}{\pi 9R^2} = \frac{1}{9}$$ Άρα: $$\frac{I_1}{I_2} = \frac{\frac{1}{2}m_1R^2}{\frac{1}{2}m_2 9R^2} = \frac{1}{9}\frac{m_1}{m_2} = \frac{1}{9}\cdot\frac{1}{9} \Leftrightarrow \frac{I_1}{I_2} = \frac{1}{81}$$

Από το ερώτημα (α):

$$L_1 = L_2 \Leftrightarrow I_1\omega_1 = I_2\omega_2 \Leftrightarrow \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{I_2}{I_1} = 81$$

γ) Ισχύει ότι: $\frac{K_1}{K_2} = \frac{\frac{L^2}{2I_1}}{\frac{L^2}{2I_2}} = \frac{I_2}{I_1} \Leftrightarrow \frac{K_1}{K_2} = 81$ δ) $Q = \frac{1}{2}I_1\omega_1^2 + \frac{1}{2}I_2\omega_2^2 + m_1gh$

4) Ένας άνθρωπος βρίσκεται στην περιφέρεια κυκλικής εξέδρα η οποία μπορεί να περιστρέφεται χωρίς τριβές γύρω από σταθερό κατακόρυφο άξονα, ο οποίος διέρχεται από το κέντρο της. Αρχικά, ο άνθρωπος και η εξέδρα ηρεμούν.



Α) Κάποια στιγμή ο άνθρωπος αρχίζει να κινείται στη διεύθυνση της ακτίνας που διέρχεται από την αρχική του θέση, προς το κέντρο της εξέδρας. Τι θα συμβεί στην εξέδρα; Δικαιολογήστε την απάντησή σας

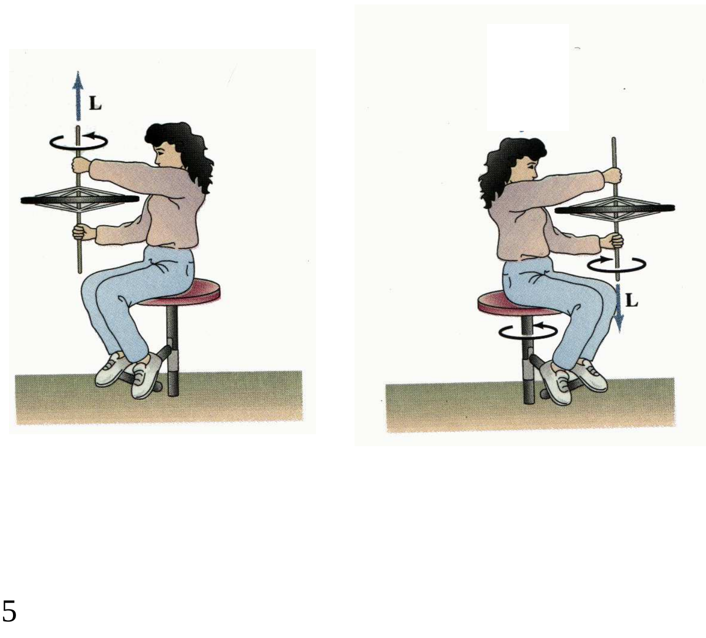
Β) Κάποια στιγμή ο άνθρωπος αρχίζει να κινείται με ταχύτητα σταθερού μέτρου ως προς τη Γη, κατά μήκος της περιφέρειας της εξέδρας. Να συγκρίνετε το μήκος του τόξου που έχει διαγράψει ο άνθρωπος όταν θα βρεθεί ξανά στο σημείο της εξέδρας από το οποίο ξεκίνησε, με την περίμετρο της εξέδρας.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Α) Επειδή η στροφορμή του συστήματος άνθρωπος-εξέδρα διατηρείται σταθερή και ίση με μηδέν, η εξέδρα δεν περιστρέφεται και παραμένει ακίνητη.

Β) Επειδή η στροφορμή του συστήματος άνθρωπος-εξέδρα διατηρείται σταθερή και ίση με μηδέν, όταν ο άνθρωπος αρχίζει να κινείται με ταχύτητα σταθερού μέτρου ως προς τη Γη, κατά μήκος της περιφέρειας της εξέδρας, η εξέδρα θα αρχίσει να περιστρέφεται κατ' αντίθετη φορά από τον άνθρωπο. Συνεπώς ο άνθρωπος όταν θα βρεθεί ξανά στο σημείο της εξέδρας από το οποίο ξεκίνησε, θα έχει διαγράψει πάνω στην εξέδρα τόξο με μήκος μικρότερο από την περίμετρό της $s<2\pi R$

5) Η κοπέλα του σχήματος κάθεται στην καρέκλα η οποία μπορεί να στρέφεται χωρίς τριβές γύρω από κατακόρυφο άξονα. Ο τροχός που κρατάει στα χέρια της στρέφεται αντίρροπα από τους δείκτες ρολογιού και έχει στροφορμή $\vec{L}$ κατακόρυφη προς τα πάνω, όπως στο σχήμα. Η κοπέλα είναι αρχικά ακίνητη.
α)Τι θα συμβεί αν η κοπέλα περιστρέψει τον τροχό κατά 180^0 γύρω από τον άξονα περιστροφής του;



β) Αν στη θέση της κοπέλας βρισκόταν γιγαντόσωμος κύριος διπλάσιας μάζας, θα άλλαζε κάτι;

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

α) Στο σύστημα καρέκλα-κοπέλα και τροχός **δεν** ασκούνται ροπές εξωτερικών δυνάμεων ως προς τον άξονα περιστροφής της καρέκλας. Συνεπώς η στροφορμή του διατηρείται σταθερή κατά τον άξονα αυτό.

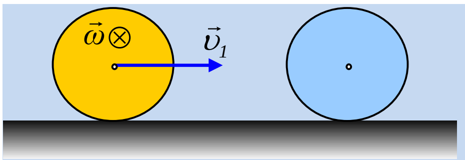
Η μεταβολή της στροφορμής του τροχού είναι: $\Delta L_{\tau\rho o\chi} = -2L$ όπου L η αρχική στροφορμή του και θετική φορά προς τα πάνω.

Εφόσον: $\overrightarrow{\Delta L}_{\kappa o\pi} + \overrightarrow{\Delta L}_{\tau\rho o\chi} = 0 \Rightarrow \overrightarrow{\Delta L}_{\kappa o\pi} = -\overrightarrow{\Delta L}_{\tau\rho o\chi} \Rightarrow \Delta L_{\kappa o\pi} = -(-2L) \Rightarrow \Delta L_{\kappa o\pi} = 2L$

Άρα η κοπέλα θα **αρχίσει να στρέφεται κατά την αρχική φορά** περιστροφής του τροχού, με γωνιακή ταχύτητα τέτοια ώστε να έχει στροφορμή 2L.

β) Ο γιγαντόσωμος κύριος θα αποκτούσε πάλι στροφορμή 2L, εφόσον όμως έχει μεγαλύτερη ροπή αδράνειας ως προς τον άξονα περιστροφής από την κοπέλα, θα στρεφόταν με μικρότερη γωνιακή ταχύτητα.

6) Λεία σφαίρα μάζας m_1=M και ακτίνας R, κυλά χωρίς να γλιστρά σε λείο οριζόντιο επίπεδο. Η ταχύτητα του ΚΜ της είναι υ_1, ενώ η γωνιακή ταχύτητα περιστροφής γύρω από άξονα που διέρχεται από το κέντρο της είναι ω, όπου $\upsilon_1=\omega R$. Η σφαίρα συγκρούεται κεντρικά και ελαστικά με ακίνητη επίσης λεία σφαίρα μάζας m_2=2M και ίδιας ακτίνας R.



Τι από τα επόμενα θα συμβεί, μετά την κρούση;

α) Η σφαίρα μάζας m_1=M θα συνεχίσει να κυλά χωρίς να γλιστρά, αλλάζοντας φορά κίνησης ενώ η σφαίρα μάζας m_2=2M θα ολισθήσει προς τα δεξιά

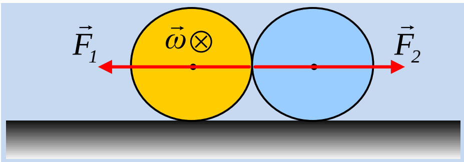
β) Τόσο η σφαίρα μάζας m_1=M όσο και η σφαίρα μάζας m_2=2M θα κυλούν χωρίς να γλιστρούν, η πρώτη προς τ' αριστερά και η δεύτερη προς τα δεξιά.

γ) Τόσο η σφαίρα μάζας m_1=M όσο και η σφαίρα μάζας m_2=2M θα κυλούν ενώ ταυτόχρονα θα γλιστρούν, η πρώτη προς τ' αριστερά και η δεύτερη προς τα δεξιά.

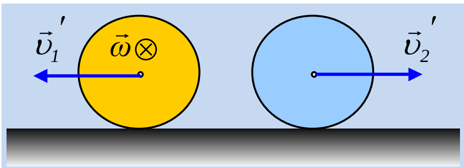
δ) Η σφαίρα μάζας m_1=M θα κυλά ενώ ταυτόχρονα θα γλιστρά προς τ' αριστερά, ενώ η σφαίρα μάζας m_2=2M θα ολισθήσει προς τα δεξιά

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Κατά τη διάρκεια της κρούσης, οι **δυνάμεις** μεταξύ των σφαιρών βρίσκονται πάνω στην οριζόντια διάμετρο (κεντρικές). Έτσι **δεν προκαλούν ροπή** ως προς το νοητό άξονα περιστροφής, οπότε **η στροφορμή κάθε σφαίρας, διατηρείται σταθερή.** Έτσι η σφαίρα μάζας m_1=M συνεχίζει να στρέφεται με γωνιακή ταχύτητα ω, ενώ η σφαίρα μάζας m_2=2M δεν αποκτά γωνιακή ταχύτητα.



Οι δυνάμεις επαφής όμως θα μεταβάλλουν την ορμή κάθε σφαίρας, οπότε οι ταχύτητες του ΚΜ κάθε σφαίρας μετά την ελαστική κρούση, θεωρώντας ότι η
σφαίρα μάζας m_1=M αλλάζει φορά κίνησης, υπολογίζονται:



ΑΔΟ: $\vec{p}_{ολ(πριν)} = \vec{p}_{ολ(μετα)} \Rightarrow m_1\upsilon_1 = m_1(-\upsilon_1') + m_2\upsilon_2'$

Ελαστική: $\frac{1}{2} m_1\upsilon_1^2 + \frac{1}{2} I_1\omega^2 = \frac{1}{2} m\upsilon_1'^2 + \frac{1}{2} I_1\omega^2 + \frac{1}{2} m\upsilon_2'^2 \Rightarrow$

$$\frac{1}{2} m_1\upsilon_1^2 = \frac{1}{2} m\upsilon_1'^2 + + \frac{1}{2} m\upsilon_2'^2$$

εφόσον η σφαίρα μάζας m_1=M συνεχίζει να στρέφεται με γωνιακή ταχύτητα ω.

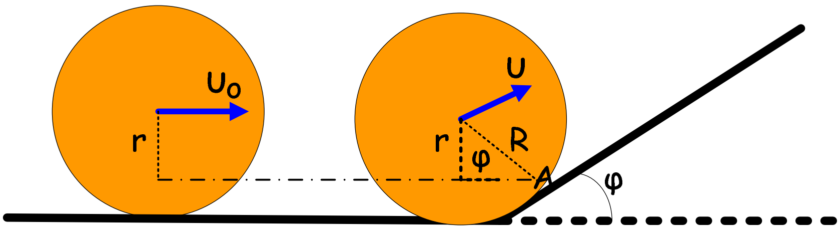
Με επίλυση του συστήματος βρίσκουμε ότι:

$$\upsilon_1' = \frac{1}{3}\upsilon_1 \quad \text{και} \quad \upsilon_2' = \frac{2}{3}\upsilon_1$$

Άρα η σφαίρα μάζας m_1=M θα εκτελεί **κύλιση με ολίσθηση**, κινούμενη προς τ' αριστερά, αφού: $\upsilon_1' = \frac{1}{3}\upsilon_1 = \frac{1}{3}\omega R$. Η σφαίρα μάζας m_2=2M θα ολισθήσει προς τα δεξιά, με ταχύτητα $\upsilon_2' = \frac{2}{3}\upsilon_1$

Σωστή απάντηση η (δ)

7) Μια σφαίρα κυλά χωρίς να γλιστρά σε οριζόντιο επίπεδο και το κέντρο μάζας της έχει ταχύτητα υ_o .Κάποια στιγμή συναντά πλάγιο επίπεδο κλίσης $\varphi=60^o$ οπότε αρχίζει να ανέρχεται σε αυτό συνεχίζοντας να κυλά χωρίς να γλιστρά . **Θεωρούμε ότι γίνεται κρούση ανάμεσα στη σφαίρα και στο σημείο A της πρώτης επαφής της με το πλάγιο επίπεδο**. Ποια η ταχύτητα του κέντρου μάζας της σφαίρας αμέσως μετά την κρούση;



ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Όταν η σφαίρα κυλά στο οριζόντιο επίπεδο, η στροφορμή της κατά τον άξονα που διέρχεται από το A και είναι κάθετος στο επίπεδο κύλισης είναι ίση με:

$$L_1 = m\upsilon_o r + I_{cm}\omega_o \Leftrightarrow L_1 = m\upsilon_o R\sigma\upsilon\nu\varphi + \frac{2}{5}mR^2\omega_o \Leftrightarrow L_1 = m\upsilon_o R\sigma\upsilon\nu\varphi + \frac{2}{5}mR\upsilon_o \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow L_1 = m\upsilon_o R(\frac{2}{5} + \sigma\upsilon\nu\varphi)$$

Όταν η σφαίρα <u>αρχίζει να κυλά</u> (υ=ωR) στο πλάγιο επίπεδο, η στροφορμή της κατά τον άξονα που διέρχεται από το A και είναι κάθετος στο επίπεδο κύλισης είναι ίση με:

$$L_2 = m\upsilon R + I_{cm}\omega \Leftrightarrow L_2 = m\upsilon R + \frac{2}{5}mR^2\omega \Leftrightarrow L_2 = m\upsilon R + \frac{2}{5}mR\upsilon \Leftrightarrow L_2 = \frac{7}{5}m\upsilon R$$

Η στροφορμή της σφαίρας κατά τον άξονα αυτό διατηρείται*, αφού η δύναμη επαφής δε δημιουργεί ροπή ως προς τον άξονα αυτό.

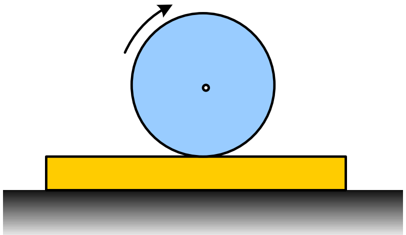
*Θεωρούμε το γινόμενο της ροπής του βάρους επί το χρονικό διάστημα Δt της κρούσης αμελητέο.

Άρα:

$$L_1 = L_2 \Leftrightarrow m\upsilon_o R(\frac{2}{5} + \sigma\upsilon\nu\varphi) = \frac{7}{5}m\upsilon R \Leftrightarrow \upsilon = \frac{5}{7}\upsilon_o(\frac{2}{5} + \sigma\upsilon\nu\varphi) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \upsilon = \frac{5}{7}\upsilon_o(\frac{2}{5} + \frac{1}{2}) \Leftrightarrow \upsilon = \frac{5}{7}\upsilon_o\frac{9}{10} \Leftrightarrow \upsilon = \frac{9}{14}\upsilon_o$$

8) Σε ένα **λείο** οριζόντιο επίπεδο **ηρεμεί** μια σανίδα μάζας m=M. Σε μια στιγμή τοποθετούμε πάνω της ένα τροχό ακτίνας R και μάζας m=M, ο οποίος **στρέφεται** δεξιόστροφα με γωνιακή ταχύτητα ω_o , όπως στο σχήμα. Ο συντελεστής τριβής μεταξύ τροχού και σανίδας είναι μ. Η ροπή αδράνειας του τροχού ως προς άξονα κάθετο σε αυτόν, που διέρχεται από το κέντρο του I_o

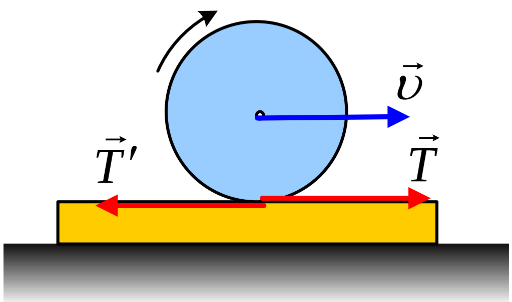


Ποιες από τις επόμενες προτάσεις είναι σωστές;

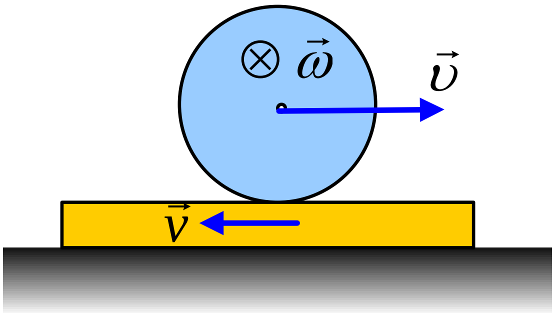
Α) Η σανίδα θα κινηθεί προς τ' αριστερά και ο τροχός προς το δεξιό άκρο της σανίδας
Β) Η ορμή του συστήματος είναι κάθε στιγμή μηδέν
Γ) Η στροφορμή του συστήματος είναι κάθε στιγμή ίση με $I_o\omega_o$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Μόλις έρθουν σε επαφή ο τροχός με τη σανίδα, θα ασκηθεί στον τροχό τριβή ολίσθησης με **φορά** προς τα **δεξιά**, η οποία θα επιταχύνει τον τροχό μεταφορικά, ενώ θα τον επιβραδύνει περιστροφικά. Η αντίδραση της Τ, η Τ΄, θα ασκηθεί στη σανίδα, με φορά προς τα αριστερά, οπότε θα επιταχύνει τη σανίδα προς τ' αριστερά .



Το σύστημα είναι μονωμένο και στο σύστημα δεν ασκούνται εξωτερικές ροπές κατά τον άξονα του τροχού. Διατηρείται λοιπόν η ορμή και η στροφορμή του κατά τον άξονα του τροχού. Μόλις το κατώτερο σημείο του τροχού έχει ταχύτητα $\omega R - \upsilon$, ίση με την ταχύτητα της σανίδας v, η τριβή μηδενίζεται και δεν υπάρχουν πλέον μεταβολές στις ταχύτητες των δύο σωμάτων. Οι τελικές ταχύτητες συνδέονται με τη σχέση: $\omega R - \upsilon = v$. Η ορμή του συστήματος παραμένει μηδέν $p_{ολ} = 0$, ενώ η στροφορμή ίση με $L_{ολ} = I_o \omega_o$



Όλες οι προτάσεις είναι σωστές

Θοδωρής Παπασγουρίδης

papasgou@gmail.com