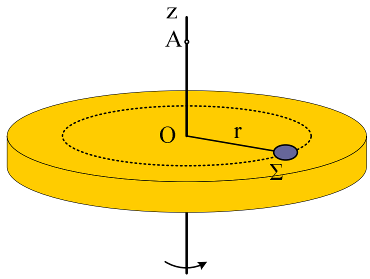
Φ.Ε: ΣΤΡΟΦΟΡΜΗ: Ο ορισμός και η διατήρηση (μέρος 1ο)

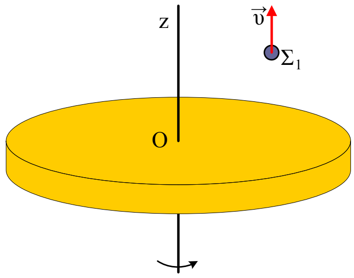


1) Α) Στο διπλανό σχήμα ένας οριζόντιος δίσκος στρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα ω, γύρω από τον κατακόρυφο άξονα z΄z, ενώ ένα υλικό σημείο Σ μάζας m, απέχει απόσταση r από το κέντρο Ο του δίσκου, χωρίς να είναι στερεωμένο στο δίσκο. Σχολιάστε τις επόμενες προτάσεις:

i) «Η στροφορμή του Σ ως προς το σημείο Ο και η στροφορμή του Σ κατά τον άξονα z΄z συμπίπτουν»

ii) «Αν (Α) ένα σημείο του άξονα z΄z, όπου (ΑΟ)=r, τότε το μέτρο της στροφορμής του Σ ως προς το Ο και το μέτρο της στροφορμή του Σ ως προς το Α, είναι ίσα.»

iii) «Η στροφορμή του Σ ως προς το σημείο Ο παραμένει σταθερή»



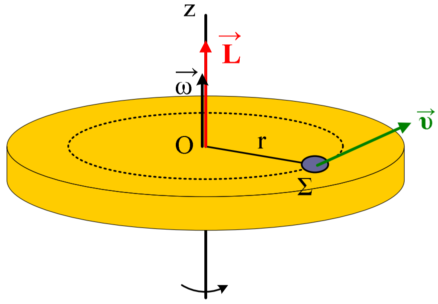
Β) Ένα άλλο υλικό σημείο $Σ_1$ επίσης μάζας m, κινείται κατακόρυφα, ενώ κάποια στιγμή έχει ταχύτητα υ, **απέχοντας κατά r από τον άξονα z΄z**. Σχολιάστε τις επόμενες προτάσεις:

i) «Η στροφορμή του $Σ_1$ ως προς το σημείο Ο και η στροφορμή του $Σ_1$ κατά τον άξονα z΄z συμπίπτουν»

ii) «Η στροφορμή του $Σ_1$ ως προς το σημείο Ο και η στροφορμή του Σ ως προς το σημείο Ο συμπίπτουν»

iii) Ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής του $Σ_1$ ως προς το Ο είναι σταθερός

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

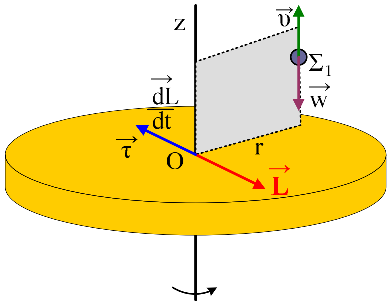


Α) Η πρόταση (i) είναι σωστή, αφού η στροφορμή του υλικού σημείου Σ ως προς το σημείο Ο είναι **κάθετη στο επίπεδο** της τροχιάς του, κατά συνέπεια **έχει την διεύθυνση του άξονα z΄z** και με βάση τον κανόνα του δεξιού χεριού έχει φορά προς τα πάνω : $L_o = L_z = m\upsilon r = m\omega r^2$

Η πρόταση (ii) είναι λανθασμένη, αφού:

$$L_A = m\upsilon(A\Sigma) = m\omega r \cdot r\sqrt{2} \Rightarrow L_A = m\omega r^2\sqrt{2} \Rightarrow L_A = L_o \cdot \sqrt{2}$$

Η πρόταση (iii) είναι σωστή αφού η στατική τριβή έχει την ακτινική διεύθυνση και δε δημιουργεί ροπή ως προς το Ο



Β) Η πρόταση (i) είναι λανθασμένη, αφού: $L_o = m\upsilon r$ ενώ $L_z = 0$, αφού κινείται παράλληλα στον άξονα z′z.

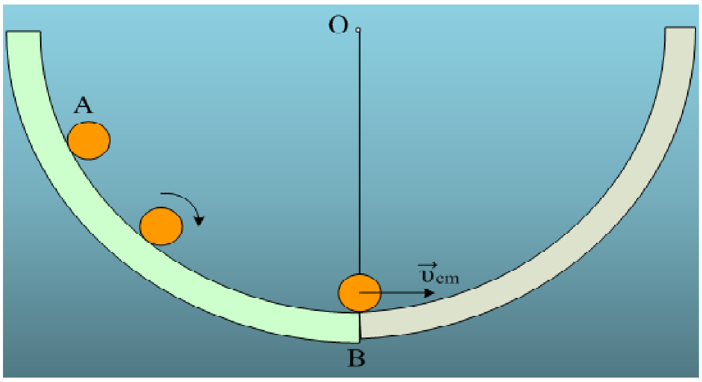
Η πρόταση (ii) είναι λανθασμένη, αφού ναι μεν:

$$L_{o(\Sigma)} = L_{o(\Sigma_1)} = m\upsilon r$$

αλλά η **στροφορμή του Σ_1 ως προς το Ο** είναι κάθετη στο επίπεδο που ορίζει ο φορέας της ταχύτητάς του και το σημείο Ο ,**έχει δηλαδή οριζόντια διεύθυνση**.

Η πρόταση (iii) είναι σωστή, αφού ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής του Σ_1 ως προς το Ο ισούται με τη ροπή του βάρους του ως προς το Ο, έχει μέτρο $\frac{dL_{o(\Sigma_1)}}{dt} = \Sigma\tau_o = mgr$ και είναι οριζόντιος.

2) Μια σφαίρα μάζας m και ακτίνας r, αφήνεται να κινηθεί στο σημείο Α ημικύκλιου ακτίνας R=10r, με το οποίο παρουσιάζει ικανή τριβή, ώστε να κυλά χωρίς να ολισθαίνει. Έτσι φθάνει στην βάση Β του ημικύκλιου, έχοντας ταχύτητα κέντρου μάζας υ_{cm} και γωνιακή ταχύτητα ω. Η ροπή αδράνειας της σφαίρας ως προς μια διάμετρό της είναι $I=\frac{2}{5}mr^2$



Τη στιγμή που η σφαίρα φθάνει στη βάση (Β) του ημικύκλιου, να εκφράσετε σε συνάρτηση με τα m, R, υ_{cm} :

i) τη στροφορμή της σφαίρας κατά τον άξονα περιστροφής της (ιδιοστροφορμή)

ii) την τροχιακή στροφορμή της σφαίρας κατά τον οριζόντιο άξονα x′x που περνά από το κέντρο Ο του ημικύκλιου και είναι κάθετος στο επίπεδο της κίνησης

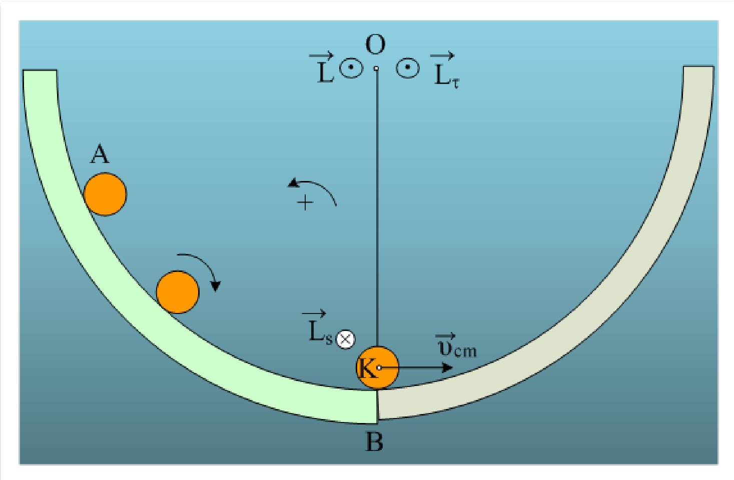
iii) τη (συνολική) στροφορμή της σφαίρας κατά τον άξονα x′x

iv) το ρυθμός μεταβολής της στροφορμής της σφαίρας κατά:

α) τον άξονα ιδιοπεριστροφής της

β) τον άξονα x'x .

ΑΠΑΝΤΗΣΗ



i) Η στροφορμή της σφαίρας κατά τον άξονα περιστροφής της (ιδιοστροφορμή) έχει μέτρο:

$$L_s = I\omega = \frac{2}{5}mr^2\omega = \frac{2}{5}mr^2\frac{\upsilon_{cm}}{r} \Rightarrow L_s = \frac{2}{5}mr\upsilon_{cm} = \frac{2}{5}m\frac{R}{10}\upsilon_{cm} \Rightarrow L_s = \frac{m\upsilon_{cm}R}{25} \quad (1)$$

Με διεύθυνση κάθετη στο επίπεδο κίνησης και **φορά προς τα μέσα** όπως στο σχήμα

.

ii) Η αντίστοιχη τροχιακή στροφορμή κατά τον άξονα x'x, έχει μέτρο:

$$L_{\tau\rho} = m\upsilon_{cm}(R-r) \Rightarrow L_{\tau\rho} = \frac{9}{10}m\upsilon_{cm}R$$

Με διεύθυνση κάθετη στο επίπεδο κίνησης και **φορά προς τα έξω** όπως στο σχήμα

iii) Η (συνολική) στροφορμή της σφαίρας κατά τον άξονα x'x, είναι το διανυσματικό άθροισμα των δύο παραπάνω στροφορμών και θεωρώντας **θετική τη φορά προς τα έξω** έχουμε:

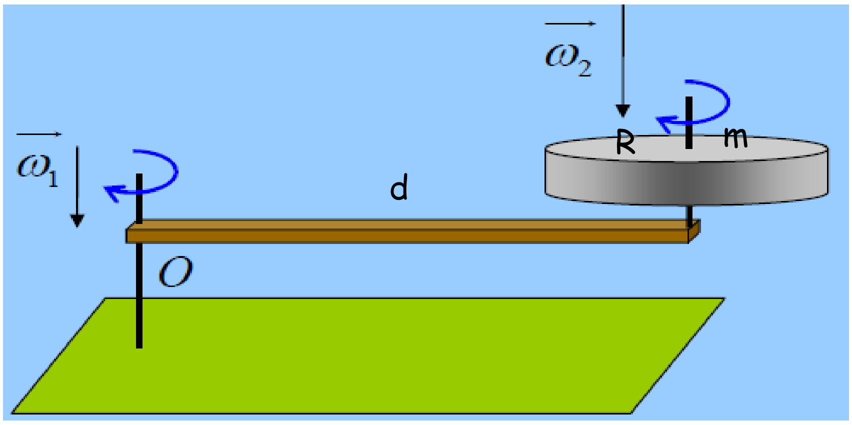
$$\vec{L} = \vec{L}_{\tau\rho} + \vec{L}_s \Rightarrow L = L_{\tau\rho} - L_s \Rightarrow L = \left(\frac{9}{10} - \frac{1}{25}\right)m\upsilon_{cm}R \Rightarrow L = \frac{43}{50}m\upsilon_{cm}R$$

Με διεύθυνση κάθετη στο επίπεδο κίνησης και **φορά προς τα έξω** όπως στο σχήμα

iv) Τη στιγμή που η σφαίρα φθάνει στη βάση (Β) του ημικύκλιου, έχει ελάχιστη δυναμική βαρυτική ενέργεια, άρα μέγιστη κινητική, αφού στην κύλιση χωρίς ολίσθηση η μηχανική ενέργεια διατηρείται σταθερή. Αυτό σημαίνει ότι έχει μέγιστη μεταφορική ταχύτητα υ_{cm} και αντίστοιχα μέγιστη γωνιακή αφού: $\upsilon_{cm} = \omega R$. Συνεπώς έχει και μέγιστη ιδιοστροφορμή και μέγιστη τροχιακή στροφορμή, οπότε:

$$\frac{dL_s}{dt} = 0 \quad \text{και} \quad \frac{dL_{\tau\rho}}{dt} = 0 \quad \text{Άρα:} \quad \frac{dL}{dt} = 0$$

3) Ο δίσκος μάζας m, ακτίνας R στρέφεται γύρω από κατακόρυφο άξονα που διέρχεται από το κέντρο του με γωνιακή ταχύτητα ω_2, (ιδιοπεριστροφή), ενώ ο βραχίονας μήκους d στρέφεται γύρω από κατακόρυφο άξονα που διέρχεται από το άκρο του Ο με γωνιακή ταχύτητα ω_1.



Να υπολογίσετε:

α) Τη στροφορμή του δίσκου κατά τον άξονα περιστροφής του (ιδιοστροφορμή)
β) Την τροχιακή στροφορμή του δίσκου κατά τον κατακόρυφο άξονα που διέρχεται από το άκρο Ο του βραχίονα
γ) τη (συνολική) στροφορμή του δίσκου κατά τον κατακόρυφο άξονα που διέρχεται από το άκρο Ο του βραχίονα

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

α) Η στροφορμή του δίσκου κατά τον άξονα περιστροφής του (ιδιοστροφορμή) έχει μέτρο:

$$L_s = L_2 = I_{cm}\omega_2 = \frac{1}{2}mR^2\omega_2$$

τη διεύθυνση του άξονα και φορά προς τα κάτω

β) Η τροχιακή στροφορμή του δίσκου κατά τον κατακόρυφο άξονα που διέρχεται από το άκρο Ο του βραχίονα έχει μέτρο:

$$L_1 = mdu_{cm} \quad \text{και επειδή} \quad u_{cm} = \omega_1 d \quad \text{έχουμε} \quad L_1 = md^2\omega_1$$

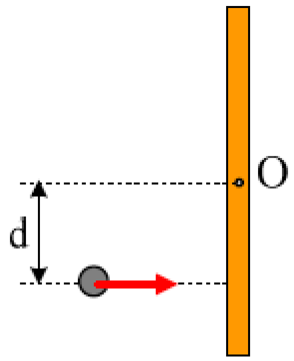
τη διεύθυνση του άξονα και φορά προς τα κάτω γ) Η στροφορμή του δίσκου κατά τον κατακόρυφο άξονα που διέρχεται από το άκρο Ο του βραχίονα είναι το διανυσματικό άθροισμα* των δύο παραπάνω στροφορμών:

$$\vec{L} = \vec{L}_2 + \vec{L}_1 \Rightarrow L = L_2 + L_1 = \frac{1}{2}mR^2\omega_2 + md^2\omega_1$$

Έχει τη διεύθυνση του άξονα και φορά προς τα κάτω

* Η στροφορμή λόγω ιδιοπεριστροφής είναι η ίδια ως προς κάθε άξονα που είναι παράλληλος στον άξονα της ιδιοπεριστροφής.

4) Μια ράβδος μήκους L και μάζας Μ ηρεμεί πάνω σε λεία οριζόντια επιφάνεια (παγοπίστα). Ένας δίσκος του hockey μάζας m κινείται οριζόντια με ταχύτητα υ κάθετη στη ράβδο. Ο δίσκος συγκρούεται **ελαστικά** με τη ράβδο σε απόσταση d από το μέσο της. Πόση πρέπει να είναι η μάζα του δίσκου, ώστε να παραμείνει **ακίνητος αμέσως μετά** την ελαστική κρούση;
Δίνεται η ροπή αδράνειας ράβδου ως προς άξονα κάθετο στη ράβδο που διέρχεται από το μέσο της: $I=(1/12)ML^2$



ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Εφόσον το σύστημα είναι μονωμένο και η διάρκεια της κρούσης αμελητέα, διατηρούνται η ορμή και η στροφορμή του συστήματος κατά τον άξονα περιστροφής της ράβδου:

$$p_{ολ(πριν)} = p_{ολ(μετα)} \Rightarrow m\upsilon = M\upsilon_{cm} \Rightarrow \upsilon_{cm} = \frac{m\upsilon}{M}$$ όπου υ_{cm} η ταχύτητα του ΚΜ της ράβδου

$$L_{ολ(πριν)} = L_{ολ(μετα)} \Rightarrow m\upsilon d = \frac{1}{12}ML^2\omega \Rightarrow \omega = \frac{12m\upsilon d}{ML^2}$$

$$K_{ολ(πριν)} = K_{ολ(μετα)} \Rightarrow \frac{1}{2}m\upsilon^2 = \frac{1}{2}M\upsilon_{cm}{}^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 \Rightarrow m\upsilon^2 = M\frac{m^2\upsilon^2}{M^2} + \frac{1}{12}ML^2\left(\frac{12m\upsilon d}{ML^2}\right)^2 \Rightarrow$$

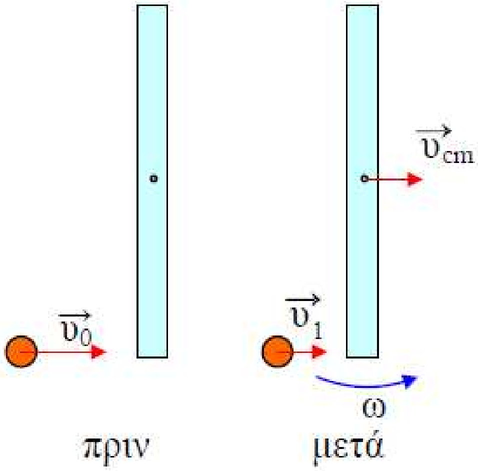
$$m\upsilon^2 = m\upsilon^2\left(\frac{m}{M} + \frac{12md^2}{ML^2}\right) \Rightarrow 1 = \frac{mL^2 + 12md^2}{Ml^2} \Rightarrow m = M\frac{L^2}{L^2 + 12d^2}$$

5) Ομογενής ράβδος μήκους L και μάζας M βρίσκεται σε **λεία οριζόντια επιφάνεια**. Μικρό σώμα μάζας m κινούμενο με ταχύτητα $υ_ο$, η διεύθυνση της οποίας είναι κάθετη στη ράβδο, **χτυπά ελαστικά** στο άκρο της. Ποια φυσικά μεγέθη διατηρούνται κατά την κρούση;
Δίνεται η ροπή αδράνειας ράβδου ως προς άξονα κάθετο στη ράβδο που διέρχεται από το μέσο της: $I = \frac{1}{12}ML^2$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Η ράβδος μετά την κρούση θα εκτελέσει σύνθετη κίνηση, η οποία εξετάζεται ως επαλληλία μιας μεταφορικής και μιας περιστροφικής γύρω από άξονα που διέρχεται από το μέσο της και είναι κάθετος στο επίπεδο που ορίζουν η ράβδος και η ταχύτητα του σώματος m.

Εφόσον το σύστημα είναι μονωμένο και η διάρκεια της κρούσης αμελητέα, διατηρούνται η ορμή και η στροφορμή του συστήματος κατά τον άξονα περιστροφής. Επιπλέον αφού η κρούση είναι ελαστική διατηρείται και η κινητική ενέργεια του συστήματος.



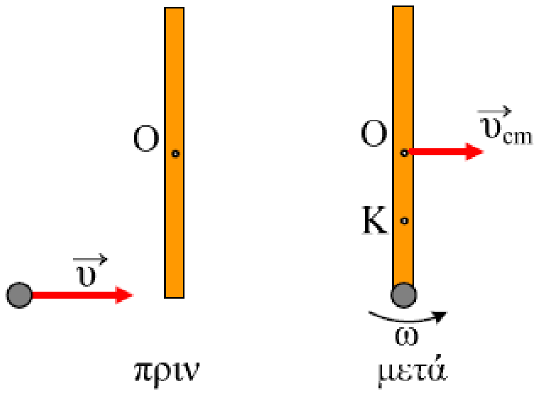
$p_{ολ(πριν)} = p_{ολ(μετα)} \Rightarrow mυ_0 = mυ_1 + Mυ_{cm}$ όπου $υ_1$ η ταχύτητα του σώματος m μετά την κρούση.

$L_{ολ(πριν)} = L_{ολ(μετα)} \Rightarrow mυ_0\frac{L}{2} = mυ_1\frac{L}{2} + \frac{1}{12}ML^2\omega$ όπου ω η γωνιακή ταχύτητα της ράβδου

$$K_{ολ(πριν)} = K_{ολ(μετα)} \Rightarrow \frac{1}{2}mυ_0^2 = \frac{1}{2}mυ_1^2 + (\frac{1}{2}Mυ_{cm}^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{12}ML^2\omega^2)$$

6) Ράβδος μάζας Μ και μήκους L βρίσκεται πάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο. Μικρό κομμάτι πλαστελίνης μάζας Μ με ταχύτητα υ, η διεύθυνση της οποίας είναι κάθετη στη ράβδο, συγκρούεται μ΄αυτή και κολλά στο άκρο της. Υπολογίστε: α) την ταχύτητα του κέντρου μάζας β) τη γωνιακή ταχύτητα γύρω από το κέντρο μάζας του συστήματος ράβδος-πλαστελίνη

Δίνεται ότι το κέντρο μάζας του συστήματος ράβδος-πλαστελίνη βρίσκεται σε απόσταση x=L/4 από το μέσο της ράβδου, προς την μεριά της πλαστελίνης και η ροπή αδράνειας ράβδου ως προς άξονα κάθετο στη ράβδο που διέρχεται από το μέσο της: $I=(1/12)ML^2$



ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Εφόσον η πλαστελίνη χτυπά τη ράβδο σε σημείο διάφορο του κέντρου μάζας της, το σύστημα ράβδος-πλαστελίνη αμέσως μετά την κρούση εκτελεί **σύνθετη** κίνηση, η οποία εξετάζεται ως επαλληλία μιας μεταφορικής και μιας περιστροφικής γύρω από άξονα ο οποίος διέρχεται από το **κέντρο μάζας του συστήματος** και είναι κάθετος στο επίπεδο που ορίζουν η ράβδος και ο φορέας της ταχύτητας.

Η ταχύτητα της μεταφορικής κίνησης υπολογίζεται με χρήση της Αρχής Διατήρησης της Ορμής:

$$p_{ολ(πριν)} = p_{ολ(μετα)} \Rightarrow m\upsilon = (M+m)\upsilon_{cm} \Rightarrow \upsilon_{cm} = \frac{m\upsilon}{M+m} \Rightarrow \upsilon_{cm} = \frac{\upsilon}{2}$$

Υπολογίζουμε τη ροπή αδράνειας του συστήματος ως προς τον άξονα περιστροφής:

$$I_{ολ} = (\frac{1}{12}Ml^2 + M\frac{l^2}{16}) + M\frac{l^2}{16} \Leftrightarrow I_{ολ} = \frac{5Ml^2}{24}$$

Η γωνιακή ταχύτητα της περιστροφικής κίνησης υπολογίζεται με χρήση της Αρχής Διατήρησης της Στροφορμής κατά τον άξονα περιστροφής:

$$L_{ολ(πριν)} = L_{ολ(μετα)} \Rightarrow m\upsilon\frac{l}{4} = (\frac{1}{12}Ml^2 + M\frac{l^2}{16} + M\frac{l^2}{16})\omega \Rightarrow$$

$$m\upsilon\frac{l}{4} = \frac{5Ml^2}{24}\omega \Rightarrow \omega = \frac{6\upsilon}{5l}$$

Θοδωρής Παπασγουρίδης

papasgou@gmail.com