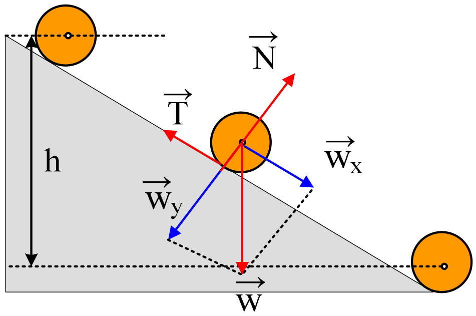
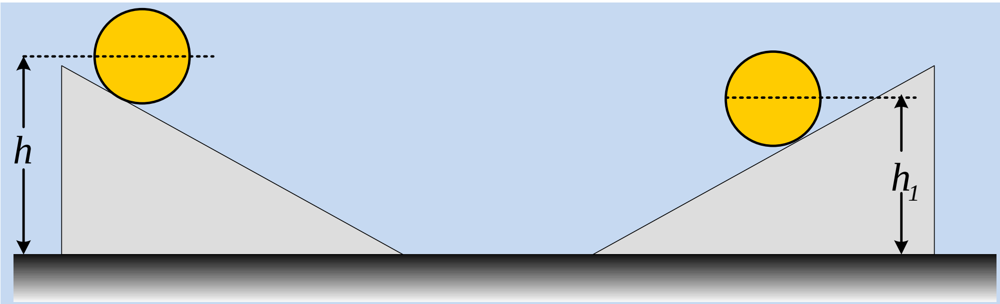
Φ.Ε: ΔΙΑΤΗΡΗΣΗ ΜΗΧΑΝΙΚΗΣ ΕΝΕΡΓΕΙΑΣ



1) Α) Σε ένα πλάγιο επίπεδο γωνίας κλίσης φ αφήνεται από ύψος h, ένα στερεό σώμα με κατανομή μάζας συμμετρική ως προς το κέντρο του. (Το στερεό μπορεί να είναι συμπαγής σφαίρα, συμπαγής κύλινδρος, κοίλη σφαίρα, κούφιος κύλινδρος, δίσκος, δακτύλιος). Το στερεό **κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει** και φθάνει στη βάση του πλάγιου επιπέδου. Να υπολογίσετε την ταχύτητα της μεταφορικής (υ) και περιστροφικής (ω) κίνησης τη στιγμή που φθάνει στη βάση του πλάγιου επιπέδου.

Η ροπή αδράνειας του σώματος ως προς άξονα που διέρχεται από το κέντρο του (για το δίσκο και το δακτύλιο είναι και κάθετος στο επίπεδό τους, ενώ για τους κυλίνδρους συμπίπτει με τον άξονα συμμετρίας τους) δίνεται από τη σχέση: $I = \lambda MR^2$, όπου λ θετική αδιάστατη σταθερά.

Β) Όταν το στερεό φθάσει στη βάση του κεκλιμένου επιπέδου, περνά στο οριζόντιο επίπεδο χωρίς απώλεια ενέργειας όπου συνεχίζει να κυλά χωρίς να ολισθαίνει. Στη συνέχεια περνά σε **λείο** πλάγιο επίπεδο **ίδιας γωνίας κλίσης φ**,. Να συγκρίνετε το ύψος από το οριζόντιο δάπεδο h_1 στο οποίο θα φθάσει το στερεό σε σχέση με το ύψος h από το οποίο αφέθηκε ελεύθερο



Γ) Αν αφήσουμε ελεύθερο έναν ομογενή συμπαγή κύλινδρο ($I = \frac{1}{2}MR^2$) και έναν κούφιο κύλινδρο ($I = MR^2$) ποιος θα ανέβει σε μεγαλύτερο ύψος στο λείο πλάγιο επίπεδο;

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Α) Η στατική τριβή που δέχεται ο κύλινδρος από το κεκλιμένο επίπεδο, δεν προκαλεί θερμική απώλεια ενέργειας, έργο εκτελεί μόνο το βάρος που είναι συντηρητική δύναμη, άρα διατηρείται η μηχανική του ενέργεια.

$$Mgh = \frac{1}{2}M\upsilon^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 \Rightarrow Mgh = \frac{1}{2}M\upsilon^2 + \frac{1}{2}\lambda MR^2\omega^2 \Rightarrow Mgh = \frac{1}{2}M\upsilon^2 + \frac{1}{2}\lambda M\upsilon^2 \Rightarrow$$

$$Mgh = \frac{1}{2}M\upsilon^2(1+\lambda) \Rightarrow \upsilon = \sqrt{\frac{2gh}{1+\lambda}}$$

Εφόσον το στερεό κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει ισχύει:

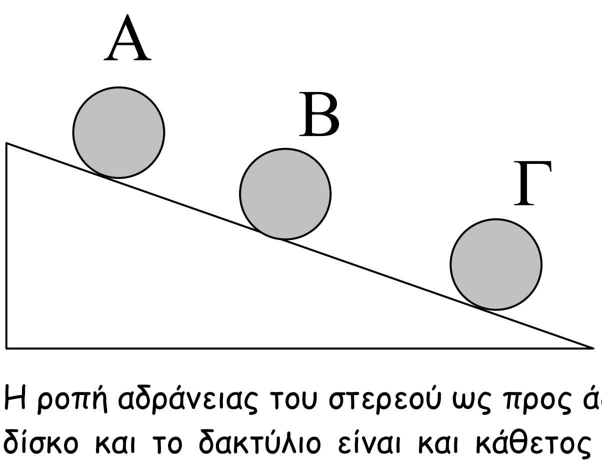
$$\upsilon = \omega R \Rightarrow \omega = \frac{\upsilon}{R} \Rightarrow \omega = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{2gh}{1+\lambda}}$$

Β) Στο λείο πλάγιο επίπεδο δεν αναπτύσσεται τριβή μεταξύ του στερεού και του επιπέδου, οπότε δεν υπάρχει ροπή κατά τον άξονα περιστροφής και η γωνιακή ταχύτητα διατηρείται σταθερή και ίση με $\omega = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{2gh}{1+\lambda}}$. Το στερεό επιβραδύνεται μεταφορικά αλλά στρέφεται ομαλά. Στη θέση μέγιστου ύψους (υ=0) έχει κινητική ενέργεια λόγω περιστροφής $K_{\pi\varepsilon\rho} = \frac{1}{2}I\omega^2 \Rightarrow .... \Rightarrow K_{\pi\varepsilon\rho} = \frac{\lambda}{\lambda+1}Mgh$ και βαρυτική δυναμική $U = U_1 + K_{\pi\varepsilon\rho} \Rightarrow U_1 = Mgh\frac{1}{\lambda+1} < U \Rightarrow h_1 < h$, δηλαδή φθάνει σε μικρότερο ύψος από αυτό που αφέθηκε ελεύθερο.

Γ) Όπως δείξαμε, στο μέγιστο ύψος στο λείο πλάγιο επίπεδο θα έχουν δυναμική ενέργεια, ο μεν συμπαγής $U_1 = Mgh\frac{1}{\frac{1}{2}+1} = \frac{2}{3}Mgh$, ενώ ο κούφιος $U_2 = Mgh\frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}Mgh$,

οπότε $U_1 > U_2 \Rightarrow h_1 > h_2$, δηλαδή ο συμπαγής θα ανέβει σε μεγαλύτερο ύψος

2) Σε κεκλιμένο επίπεδο κυλά χωρίς να ολισθαίνει ένα σώμα κυκλικής διατομής. Στο σχήμα απεικονίζεται σε τρεις θέσεις Α,Β και Γ, όπου και στις τρεις γνωρίζουμε ότι έχει μη μηδενική ταχύτητα.



Να συμπληρωθεί ο πίνακας:

	U	$K_{\mu\varepsilon\tau}$	$K_{\pi\varepsilon\rho}$
Α	285J		30J
Β		150J	60J
Γ	75J		

Η ροπή αδράνειας του στερεού ως προς άξονα που διέρχεται από το κέντρο του (για το δίσκο και το δακτύλιο είναι και κάθετος στο επίπεδό τους, ενώ για τους κυλίνδρους συμπίπτει με τον άξονα συμμετρίας τους) δίνεται από τη σχέση: $I = \lambda MR^2$, όπου λ θετική αδιάστατη σταθερά.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

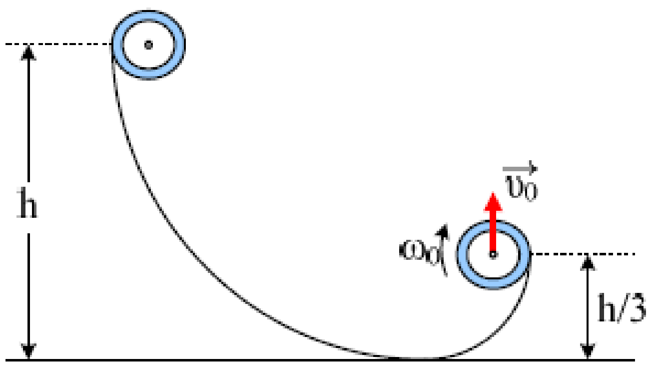
Εφόσον το στερεό κυλά χωρίς να ολισθαίνει ισχύει: $\frac{K_{\mu\varepsilon\tau}}{K_{\pi\varepsilon\rho}} = \frac{\frac{1}{2}m\upsilon^2}{\frac{1}{2}\lambda mR^2\omega^2} = \frac{1}{\lambda} = \sigma\tau\alpha\theta$ και δεν υπάρχουν θερμικές απώλειες ενέργειας.

Στην περίπτωσή μας: $\frac{K_{B(\mu\varepsilon\tau)}}{K_{B(\pi\varepsilon\rho)}} = \frac{150}{60} = \frac{5}{2} = \sigma\tau\alpha\theta$, άρα $K_{B(\mu\varepsilon\tau)} = \frac{5}{2}K_{B(\pi\varepsilon\rho)} = \frac{5}{2}30J = 75J$

Λόγω διατήρησης της μηχανικής ενέργειας έχουμε $E_{o\lambda} = 390J$, οπότε:

	U	$K_{\mu\varepsilon\tau}$	$K_{\pi\varepsilon\rho}$
A	285J	75J	30J
B	180J	150J	60J
Γ	75J	225J	90J

3) Ένας κούφιος κύλινδρος με λεπτά τοιχώματα, μάζας Μ και ακτίνας R, αφήνεται ελεύθερος στο σημείο Α από ύψος h. Ο κύλινδρος κυλά χωρίς να γλιστρά στο εσωτερικό του οδηγού του σχήματος. Ο οδηγός έχει τέτοια κλίση ώστε στο άκρο Γ, γίνεται κατακόρυφος. Ο κύλινδρος φθάνει στο άκρο Γ, το οποίο απέχει απόσταση h/3 από το οριζόντιο επίπεδο, οπότε ξεφεύγει από τον οδηγό και κινείται κατακόρυφα προς τα πάνω. Να εξετάσετε αν στη θέση μέγιστου ύψους έχει κινητική ενέργεια και να υπολογίσετε το μέγιστο ύψος στο οποίο θα ανέβει ο κύλινδρος



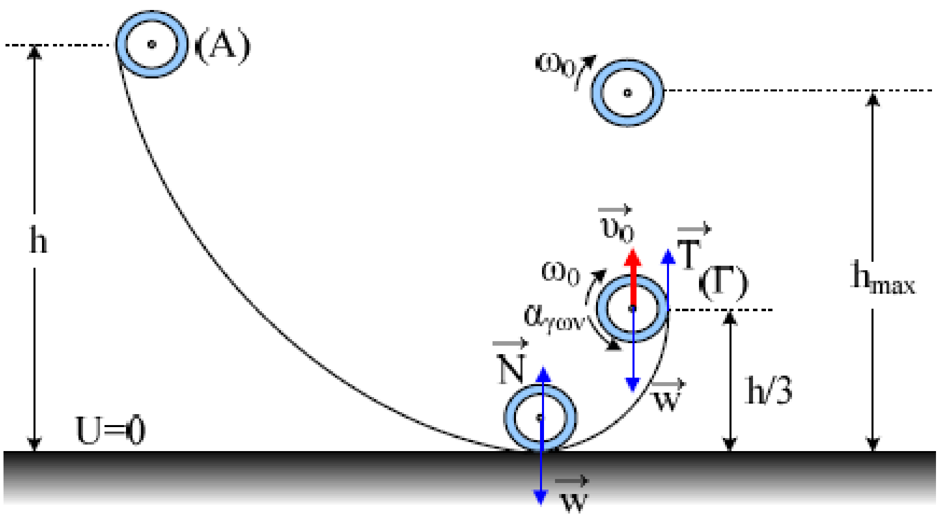
ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Η στατική τριβή που δέχεται ο κύλινδρος από τον οδηγό, δεν προκαλεί θερμική απώλεια ενέργειας, άρα διατηρείται η μηχανική του ενέργεια. Τη στιγμή που εγκαταλείπει τον οδηγό στη θέση Γ, έχει γωνιακή ταχύτητα:

$$E_{ο\lambda(\mathrm{A})} = E_{ο\lambda(\Gamma)} \Leftrightarrow Mgh = Mg\frac{h}{3} + \frac{1}{2}M\upsilon_0^{\,2} + \frac{1}{2}I\omega_0^{\,2} \Leftrightarrow Mg\frac{2h}{3} = \frac{1}{2}M\omega_0^{\,2}R^2 + \frac{1}{2}MR^2\omega_0^{\,2} \Leftrightarrow$$

$$Mg\frac{2h}{3} = M\omega_0^{\,2}R^2 \Leftrightarrow \omega_0^{\,2} = \frac{2gh}{3R^2}$$

Μόλις ο κύλινδρος **εγκαταλείψει τον οδηγό**, η μόνη δύναμη που δέχεται είναι το βάρος του, το οποίο όμως δεν προκαλεί ροπή κατά τον άξονα περιστροφής. Άρα δεν έχει γωνιακή επιτάχυνση και έτσι **η γωνιακή του ταχύτητα διατηρείται σταθερή**. Το βάρος όμως επιβραδύνει τη μεταφορική κίνηση, προκαλώντας επιβράδυνση σταθερού μέτρου: α=g. Συνεπώς η σύνθετη κίνηση που εκτελεί μόλις εγκαταλείψει τον οδηγό μπορεί να εξεταστεί ως επαλληλία μιας ομαλής περιστροφικής και μιας ομαλά επιβραδυνόμενης μεταφορικής. Συνεπώς **στη θέση μέγιστου ύψους έχει κινητική ενέργεια** λόγω περιστροφικής κίνησης.

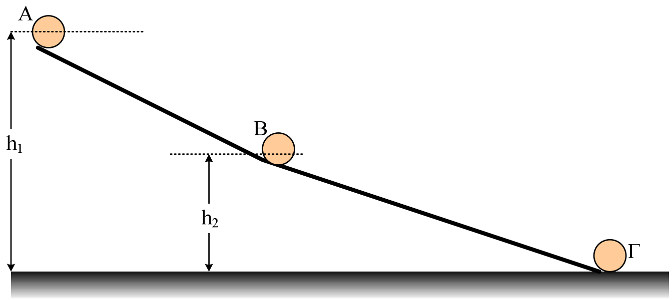


Στο μέγιστο ύψος φθάνει τη στιγμή που μηδενίζεται η μεταφορική του ταχύτητα:

$$E_{ο\lambda(\mathrm{A})} = E_{ο\lambda(H)} \Leftrightarrow Mgh = Mgh_{\max} + \frac{1}{2}I\omega_0^{\,2} \Leftrightarrow Mgh = Mgh_{\max} + \frac{1}{2}MR^2\frac{2gh}{3R^2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{3}Mgh = Mgh_{\max} \Leftrightarrow h_{\max} = \frac{2h}{3}$$

4) Μια μικρή σφαίρα ακτίνας r αφήνεται να κινηθεί από τη θέση Α σε ύψος h_1 κατά μήκος του κεκλιμένου επιπέδου ΑΒ, όπου **κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει**. Φτάνοντας στο Β σε ύψος h_2 συνεχίζει την κίνησή της κατά μήκος του **λείου** κεκλιμένου επιπέδου ΒΓ.



Να συγκρίνετε την ταχύτητα του κέντρου της σφαίρας στη θέση Γ όταν ακολουθεί την πιο πάνω διαδρομή, με την ταχύτητα του κέντρου της σφαίρας στη θέση Γ, αν το ΒΓ **δεν** ήταν λείο, οπότε η σφαίρα **συνέχιζε** να κυλά χωρίς να ολισθαίνει

Δίνονται η ροπή αδράνειας της σφαίρα ως προς μια διάμετρό της $I=\frac{2}{5}Mr^2$ και το g.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

$$K_A+U_A=K_B+U_B\Rightarrow mgh_1=mgh_2+\frac{1}{2}m\upsilon_B^2+\frac{1}{2}I\omega^2\Rightarrow mg(h_1-h_2)=\frac{1}{2}m\upsilon_B^2+\frac{1}{2}\frac{2}{5}mr^2\omega^2\Rightarrow$$

$$\Rightarrow mg(h_1-h_2)=\frac{7}{10}m\upsilon_B^2\Rightarrow \upsilon_B^2=\frac{10}{7}g(h_1-h_2)\Rightarrow \omega^2=\frac{10}{7}\frac{g(h_1-h_2)}{r^2}$$

Στο **λείο** κεκλιμένο επίπεδο ΒΓ δεν αναπτύσσεται τριβή μεταξύ του στερεού και του επιπέδου, οπότε δεν υπάρχει ροπή κατά τον άξονα περιστροφής και η γωνιακή ταχύτητα διατηρείται σταθερή και ίση με $\omega^2=\frac{10}{7}\frac{g(h_1-h_2)}{r^2}$

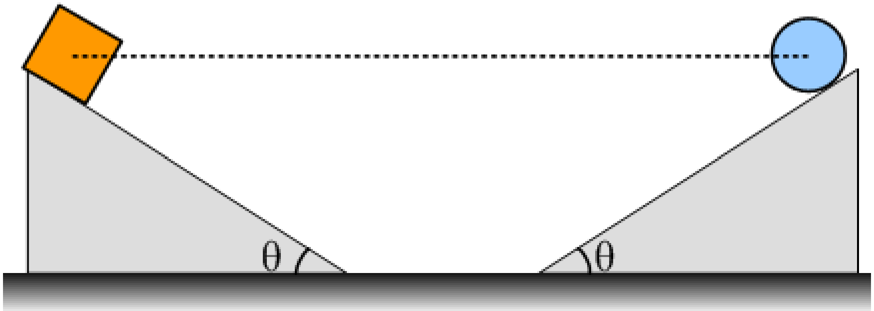
Στη θέση Γ η σφαίρα έχει κινητική ενέργεια λόγω περιστροφικής κίνησης

$$K_{\pi\varepsilon\rho}=\frac{1}{2}I\omega^2\Rightarrow ...\Rightarrow K_{\pi\varepsilon\rho}=\frac{2}{7}mg(h_1-h_2)$$

Αν το ΒΓ **δεν** ήταν λείο, οπότε η σφαίρα **συνέχιζε** να κυλά χωρίς να ολισθαίνει κατά μήκος όλης της διαδρομής, θα έφτανε στο Γ με γωνιακή ταχύτητα $\omega^2=\frac{10}{7}\frac{gh_1}{r^2}$ και κινητική ενέργεια λόγω περιστροφικής κίνησης $K'_{\pi\varepsilon\rho}=\frac{1}{2}I\omega^2\Rightarrow ...\Rightarrow K'_{\pi\varepsilon\rho}=\frac{2}{7}mgh_1$

Συνεπώς $K_{\pi\varepsilon\rho}<K'_{\pi\varepsilon\rho}\Rightarrow K_{\mu\varepsilon\tau}>K'_{\mu\varepsilon\tau}\Rightarrow \upsilon>\upsilon'$, δηλαδή όταν το ΒΓ είναι λείο, η ταχύτητα του κέντρου της σφαίρας στη θέση Γ είναι μεγαλύτερη απ' αυτή που αποκτά όταν κυλά χωρίς να ολισθαίνει σε όλο το μήκος της διαδρομής.

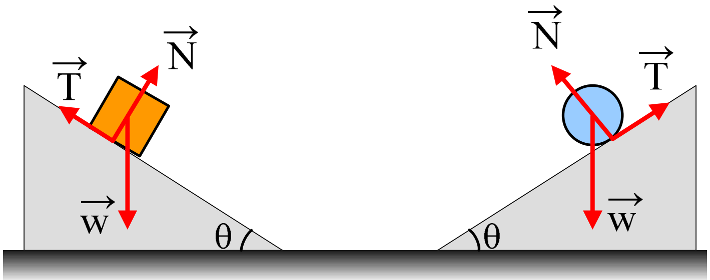
5) Κατά μήκος δυο όμοιων κεκλιμένων επιπέδων και από το ίδιο ύψος αφήνονται να κινηθούν δύο ομογενή στερεά, ένας κύβος και ένας κύλινδρος της **ίδιας μάζας m**. Τα δύο σώματα παρουσιάζουν με τα επίπεδα τον **ίδιο** συντελεστή τριβής και **ολισθαίνουν κατά μήκος των δύο επιπέδων**.



Κατά τη διάρκεια της κίνησης του κύβου ή του κυλίνδρου έχουμε μεγαλύτερη θερμική απώλεια ενέργειας;

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Στο σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι δυνάμεις που ασκούνται στα σώματα, τα οποία αφού ολισθαίνουν δέχονται δύναμη **τριβής ολίσθησης** T=μ·N=μmgσυνθ



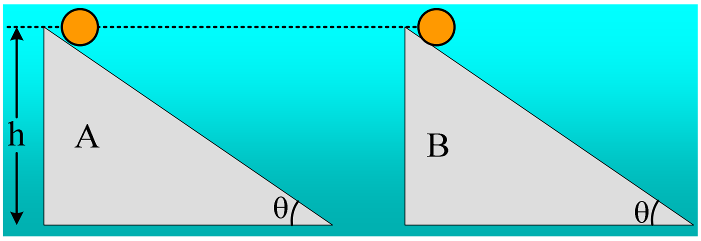
Όμως, ενώ ο κύβος θα εκτελέσει μεταφορική κίνηση, ο κύλινδρος, εξαιτίας της ροπής της τριβής, θα εκτελέσει σύνθετη.

Για τον κύβο: $K_{1(\tau\varepsilon\lambda)} - K_{1(\alpha\rho\chi)} = W_{w_x} + W_T \Rightarrow K_{1(\tau\varepsilon\lambda)} - 0 = Mg\eta\mu\varphi x - Tx \Rightarrow K_{1(\tau\varepsilon\lambda)} = Mgh - Tx$

Για τον κύλινδρο: $K_{2(\tau\varepsilon\lambda)} - K_{2(\alpha\rho\chi)} = Mgh - Tx + TR\theta \Rightarrow K_{2(\tau\varepsilon\lambda)} = Mgh - Tx + TR\theta$

Προφανώς $K_{2(\tau\varepsilon\lambda)} > K_{1(\tau\varepsilon\lambda)}$ Άρα, κατά τη διάρκεια της κίνησης του κύβου έχουμε μεγαλύτερη θερμική απώλεια ενέργειας

6) Δίνονται δύο κεκλιμένα επίπεδα Α και Β με την ίδια κλίση. Μια σφαίρα αφήνεται να κινηθεί πρώτα από την κορυφή του επιπέδου Α και ύστερα του επιπέδου Β. Το **Α** επίπεδο είναι **λείο**, ενώ στο **Β** λόγω τριβών η σφαίρα **κυλά χωρίς να γλιστρά**

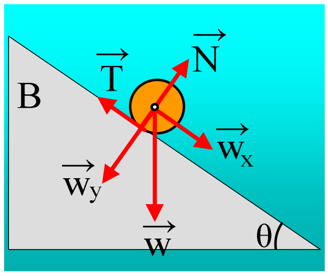


Ι) Στη βάση τίνος επιπέδου η σφαίρα φθάνει με μεγαλύτερη κινητική ενέργεια;

ΙΙ) Στη βάση τίνος επιπέδου η σφαίρα φθάνει γρηγορότερα;

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Ι) Στο Α επίπεδο η σφαίρα εκτελεί μεταφορική κίνηση, αφού δεν δέχεται καμιά ροπή που θα την επιτάχυνε στροφικά. Στο Β επίπεδο αναπτύσσεται στατική τριβή, η ροπή της οποίας περιστρέφει τη σφαίρα. Επειδή η στατική τριβή δεν προκαλεί θερμικές απώλειες ενέργειας, η μηχανική ενέργεια παραμένει σταθερή στη διάρκεια της κίνησης κατά μήκος και των δύο επιπέδων: $K_{τελ} = U_{αρχ} = mgh$



Συνεπώς η τελική κινητική ενέργεια της σφαίρας είναι ίδια και στις δύο περιπτώσεις.

ΙΙ) Στο επίπεδο Α, όλη η αρχική δυναμική ενέργεια, μετατρέπεται σε κινητική. Η κινητική αυτή ενέργεια είναι μόνο μεταφορική $K_A = \frac{1}{2}m\upsilon_A^2$.

Στο Β επίπεδο η τελική κινητική ενέργεια είναι επίσης ίση με την αρχική δυναμική, αλλά τώρα ένα μέρος της εμφανίζεται σαν μεταφορική και ένα μέρος της σαν περιστροφική, $K_B = \frac{1}{2}m\upsilon_A^2 + \frac{1}{2}I\omega^2$. Έτσι η **μεταφορική κινητική** ενέργεια, που συνδέεται με την ταχύτητα υ_{cm}, είναι **μικρότερη** στην περίπτωση της κύλισης.

Συμπέρασμα: Στο **λείο** επίπεδο το σώμα αποκτά **μεγαλύτερη ταχύτητα μεταφορικής** κίνησης, οπότε **φτάνει και σε μικρότερο χρόνο** στη βάση του.

Θοδωρής Παπασγουρίδης

papasgou@gmail.com