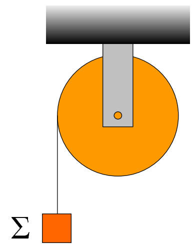
Φ.Ε: Γενικευμένη μορφή 2ου Νόμου Νεύτωνα

1) Γύρω από μια τροχαλία ακτίνας R και μάζας M έχουμε τυλίξει ένα αβαρές νήμα, στο άκρο του οποίου δένουμε ένα σώμα Σ, μάζας m=M/2, το οποίο συγκρατούμε **σε ύψος h από το έδαφος**. Σε μια στιγμή ($t=0$) αφήνουμε το σώμα Σ να πέσει. Το σχοινί δε γλιστρά στο αυλάκι της τροχαλίας.



Δίνεται η ροπή αδράνειας της τροχαλίας ως προς τον άξονά της:
I= ½ MR^2 και η επιτάχυνση της βαρύτητας g

α) Να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής της τροχαλίας κατά τον άξονα περιστροφής της
β) Να σχεδιάσετε το διάγραμμα του μέτρου της στροφορμής, κατά τον άξονα περιστροφής, του συστήματος τροχαλία-σώμα Σ σε σχέση με το χρόνο

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

α) Υπολογίζουμε πρώτα την επιτάχυνση του (Σ): $a=\frac{g}{2}$ και το μέτρο της τάσης του νήματος: $T=\frac{Mg}{4}$. Οπότε ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής της τροχαλίας κατά τον άξονα περιστροφής της έχει μέτρο:

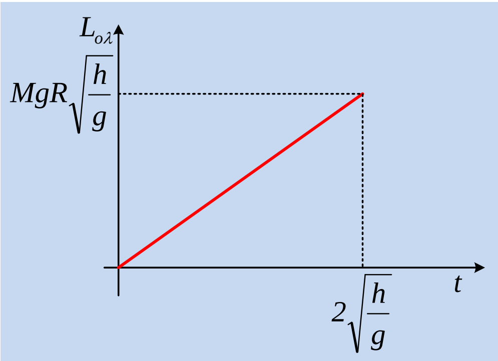
$$\frac{dL_{τρ}}{dt}=\Sigma\tau=TR\Rightarrow\frac{dL_{τρ}}{dt}=\frac{MgR}{4}$$

, με διεύθυνση αυτή του άξονα, δηλαδή κάθετη στο επίπεδο του σχήματος και φορά προς τον αναγνώστη

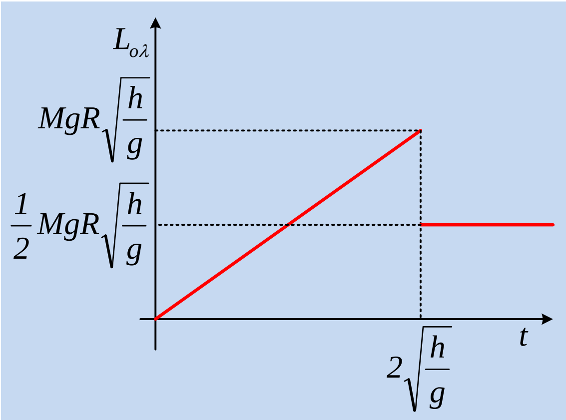
β) Ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής ενός συστήματος σωμάτων συνδέεται με τις ροπές των **εξωτερικών** δυνάμεων του συστήματος. Το βάρος της τροχαλίας και η δύναμη του άξονα δε δημιουργούν ροπή κατά τον άξονα περιστροφής. Ροπή δημιουργεί μόνο το βάρος του σώματος Σ. Άρα:

$$\frac{dL_{ολ}}{dt}=\Sigma\tau_{εξ}=mgR=\frac{M}{2}gR\Rightarrow\frac{\Delta L_{ολ}}{\Delta t}=\frac{L_{ολ}-0}{t-0}=\frac{MgR}{2}\Rightarrow L_{ολ}=\frac{MgR}{2}t \quad \text{όπου } 0\le t\le 2\sqrt{\frac{h}{g}}$$

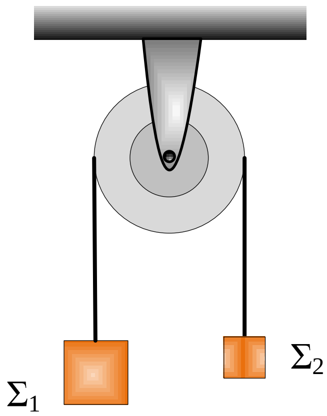
αφού το Σ φθάνει στο έδαφος σε $\Delta t=2\sqrt{\frac{h}{g}}$



Στη συνέχεια το (Σ) ακινητοποιείται, ενώ η τροχαλία και εφόσον υπάρχει σχοινί να ξετυλίγεται, στρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα: $\omega = \frac{g}{2R}\cdot 2\sqrt{\frac{h}{R}} = \frac{g}{R}\sqrt{\frac{h}{R}}$, οπότε έχει σταθερή στροφορμή: $L = \frac{1}{2}MR^2\frac{g}{R}\sqrt{\frac{h}{R}} \Rightarrow L = \frac{1}{2}MgR\sqrt{\frac{h}{R}}$



2) Τα σώματα $Σ_1$ και $Σ_2$ με μάζες m_1, m_2 όπου $m_1 = 4m_2$, είναι δεμένα στα άκρα νήματος το οποίο περνά από τροχαλία ακτίνας R και μάζας $M = 2m_1$. Για t=0 αφήνουμε τα σώματα ελεύθερα να κινηθούν. Δίνεται η ροπή αδράνειας της τροχαλίας ως προς τον άξονά της: $I = \frac{1}{2}MR^2$ και η επιτάχυνση της βαρύτητας g. Να βρεθούν:

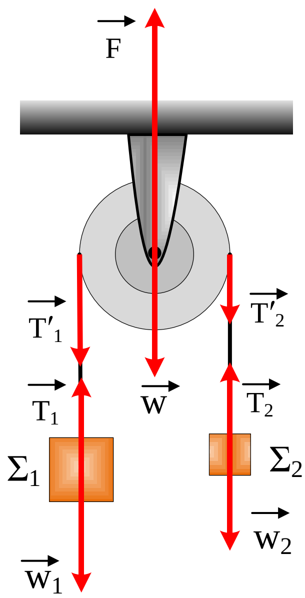


Α) Ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής του συστήματος τροχαλία-μάζες κατά τον άξονα περιστροφής της τροχαλίας

Β) Ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής της τροχαλίας κατά τον άξονα περιστροφής της

Γ) Ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής του $Σ_1$ κατά τον άξονα περιστροφής της τροχαλίας

Δ) Ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής του $Σ_2$ κατά τον άξονα περιστροφής της τροχαλίας



ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Τα δύο σώματα κινούνται με επιτάχυνση ίσου μέτρου:

$$m_1 g - T_1 = m_1 a$$
$$T_2 - m_2 g = m_2 a \quad \Rightarrow a = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2 + M} g \Rightarrow a = \frac{g}{3}$$
$$T_1 - T_2 = \frac{1}{2} Ma$$

Άρα: $T_1 = \frac{2}{3} m_1 g = \frac{8}{3} m_2 g$, $T_2 = \frac{4}{3} m_2 g$

Α) Ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής ενός συστήματος σωμάτων συνδέεται με τις ροπές των **εξωτερικών** δυνάμεων του συστήματος. Το βάρος της τροχαλίας και η δύναμη του άξονα δε δημιουργούν ροπή κατά τον άξονα περιστροφής. Ροπή δημιουργεί μόνο το βάρος του $Σ_1$ και του $Σ_2$. Άρα:

$$\frac{dL_{ολ}}{dt} = \Sigma \tau_{εξ} = m_1 gR - m_2 gR = (m_1 - m_2) gR \Rightarrow \frac{dL_{ολ}}{dt} = 3 m_2 gR$$

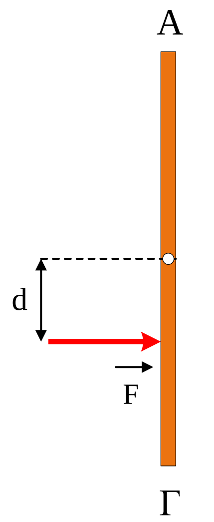
Β) $\frac{dL_{τρ}}{dt} = T_1 R - T_2 R \Rightarrow \frac{dL_{τρ}}{dt} = \frac{4 m_2 gR}{3}$ Γ) $\frac{dL_1}{dt} = m_1 gR - T_1 R = \frac{m_1 gR}{3} \Rightarrow \frac{dL_1}{dt} = \frac{4 m_2 gR}{3}$

Δ) $\frac{dL_2}{dt} = T_2 R - m_2 gR \Rightarrow \frac{dL_2}{dt} = \frac{m_2 gR}{3}$

Όλα τα διανύσματα έχουν τη διεύθυνση του άξονα, δηλαδή κάθετη στο επίπεδο του σχήματος και φορά **προς τον αναγνώστη**

Οι τιμές επαληθεύουν ότι: $\frac{dL_{ολ}}{dt} = \frac{dL_{τρ}}{dt} + \frac{dL_1}{dt} + \frac{dL_2}{dt}$

3) Ράβδος ΑΓ μήκους L και μάζας Μ ισορροπεί πάνω σε λεία οριζόντια επιφάνεια. Στη διάρκεια ενός πολύ μικρού χρονικού διαστήματος Δt, χτυπάμε τη ράβδο με δύναμη F, η οποία ενεργεί κάθετα στη ράβδο σε απόσταση d από το κέντρο μάζας της, προς την πλευρά του άκρου Γ.
Να βρεθεί το σημείο της ράβδου το οποίο παραμένει ακίνητο (κέντρο κρούσης) αμέσως μετά την κρούση
Δίνεται η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς άξονα που διέρχεται από το μέσο της και είναι κάθετος σε αυτή: $I_{cm} = 1/12\ ML^2$



ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Η ράβδος αμέσως μετά την κρούση εκτελεί **σύνθετη** κίνηση, η οποία εξετάζεται ως επαλληλία μιας μεταφορικής και μιας αριστερόστροφης περιστροφικής γύρω από υποθετικό άξονα ο οποίος διέρχεται από το κέντρο μάζας της και είναι κάθετος στο επίπεδο που ορίζεται από το φορέα της δύναμης και το κέντρο μάζας της ράβδου.

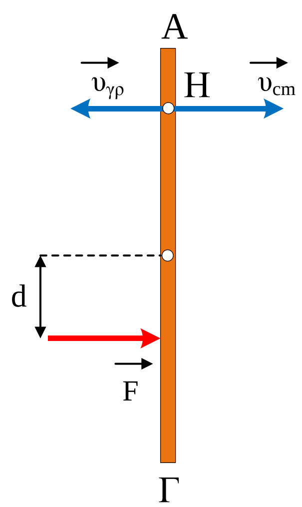
Σύμφωνα με τη γενικευμένη μορφή του 2ου Νόμου του Νεύτωνα για τη μεταφορική κίνηση ισχύει:

$$\Sigma F = \frac{\Delta p}{\Delta t} \Leftrightarrow F = \frac{p-0}{\Delta t} \Leftrightarrow F \cdot \Delta t = p = M \cdot \upsilon_{cm} \Leftrightarrow \upsilon_{cm} = \frac{F \cdot \Delta t}{M} \quad (1)$$

Σύμφωνα με τη γενικευμένη μορφή του 2ου Νόμου του Νεύτωνα για την περιστροφική κίνηση γύρω από το νοητό άξονα περιστροφής, ισχύει:

$$\Sigma \tau = \frac{\Delta L}{\Delta t} \Leftrightarrow F \cdot d = \frac{L-0}{\Delta t} \Leftrightarrow F \cdot d \cdot \Delta t = L = I_{cm} \cdot \omega \Leftrightarrow F \cdot d \cdot \Delta t = \frac{1}{12} Ml^2 \cdot \omega \Leftrightarrow \omega = \frac{12F \cdot d \cdot \Delta t}{Ml^2} \quad (2)$$

Το σημείο το οποίο αρχικά παραμένει ακίνητο (κέντρο κρούσης) θα πρέπει να έχει γραμμική ταχύτητα αντίθετη της μεταφορικής. Άρα θα βρίσκεται προς την πλευρά του άκρου Α και σε απόσταση r από το μέσο Κ της ράβδου.
Για το σημείο αυτό ισχύει:



$$\vec{\upsilon}_H = \vec{\upsilon}_{cm} + \vec{\upsilon}_{\gamma\rho} = 0 \Leftrightarrow \vec{\upsilon}_{cm} = -\vec{\upsilon}_{\gamma\rho} \Leftrightarrow \upsilon_{cm} = \upsilon_{\gamma\rho} = \omega \cdot r \Leftrightarrow r = \frac{\upsilon_{cm}}{\omega} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow r = \frac{\frac{F \cdot \Delta t}{M}}{\frac{12Fd \cdot \Delta t}{ML^2}} \Leftrightarrow r = \frac{L^2}{12d}$$

4) Ομογενής ράβδος μάζας Μ και μήκους L, μπορεί να περιστρέφεται γύρω από οριζόντιο άξονα που διέρχεται από το άκρο της Α και είναι κάθετος σε αυτή. Στο άλλο άκρο Γ της ράβδου είναι στερεωμένη σφαίρα μάζας Μ αμελητέων διαστάσεων. Η ράβδος είναι αρχικά **κατακόρυφη**. Κάποια στιγμή μια απειροστά μικρή ώθηση στο άκρο Γ θέτει το σύστημα ράβδου-σφαίρας σε περιστροφική κίνηση.

Α) Να δείξετε ότι ο μέγιστος ρυθμός μεταβολής της στροφορμής του συστήματος ράβδου-σφαίρας κατά τον άξονα περιστροφής του, παρατηρείται τη στιγμή που το σύστημα διέρχεται από την οριζόντια θέση

Β) Να υπολογίσετε το μέγιστο ρυθμό μεταβολής της στροφορμής του συστήματος ράβδου-σφαίρας κατά τον άξονα περιστροφής του

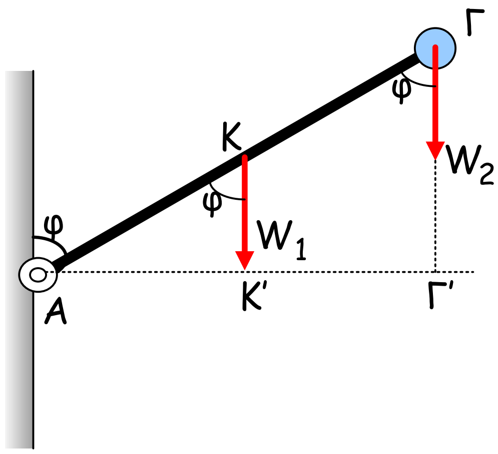
Γ) Τη στιγμή που η ράβδος διέρχεται από την οριζόντια θέση, ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής της κατά τον άξονα περιστροφής της είναι ίσος, μεγαλύτερος ή μικρότερος από MgL/2; Δικαιολογείστε την απάντησή σας

Δ) Τη στιγμή που η ράβδος διέρχεται από την οριζόντια θέση, ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής της σφαίρας κατά τον άξονα περιστροφής της ράβδου είναι ίσος, μεγαλύτερος ή μικρότερος από MgL; Δικαιολογείστε την απάντησή σας

Δίνεται η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς άξονα που διέρχεται από το μέσο της και είναι κάθετος σε αυτή: $I_{cm}=1/12\ ML^2$ και η επιτάχυνση της βαρύτητας g.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Α) Ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής ενός συστήματος σωμάτων κατά τον άξονα περιστροφής του είναι ίσος με το αλγεβρικό άθροισμα των ροπών των εξωτερικών δυνάμεων. Τη στιγμή που η ράβδος σχηματίζει γωνία φ με την κατακόρυφη, ισχύει:

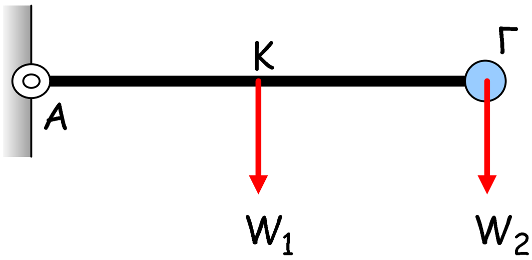


$$\frac{dL_{ολ}}{dt}=\Sigma\tau_{Α(εξ)}=W_1\cdot(ΑΚ')+W_2(ΑΓ')=Mg\cdot\frac{L}{2}ημφ+Mg\cdot Lημφ\Leftrightarrow\frac{dL_{ολ}}{dt}=\frac{3}{2}MgLημφ$$

Προφανώς ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής γίνεται μέγιστος όταν:

$ημφ=1=ημ\frac{\pi}{2}\Leftrightarrow\varphi=\frac{\pi}{2}$ δηλαδή όταν το σύστημα ράβδος-σφαίρα διέρχεται από την οριζόντια θέση.

Β) Ο μέγιστος ρυθμός μεταβολής της στροφορμής του συστήματος ράβδου-σφαίρας κατά τον άξονα περιστροφής του, όταν το σύστημα ράβδος-σφαίρα διέρχεται από την οριζόντια θέση, είναι ίσος με:



$$\left[\frac{dL_{o\lambda}}{dt}\right]_{\max} = \Sigma\tau_{\mathrm{A}(\varepsilon\xi)} = W_1\cdot(\mathrm{AK}) + W_2(\mathrm{A\Gamma}) = Mg\cdot\frac{L}{2} + Mg\cdot L \Leftrightarrow \left[\frac{dL_{o\lambda}}{dt}\right]_{\max} = \frac{3}{2}MgL$$

Γ) Τη στιγμή όπου το σύστημα ράβδος-σφαίρα διέρχεται από την οριζόντια θέση, η γωνιακή επιτάχυνση είναι ίση με:

$$\Sigma\tau_{\mathrm{A}(\varepsilon\xi)} = \mathrm{I}_{o\lambda}\cdot\alpha_{\gamma\omega\nu} \Leftrightarrow \frac{3}{2}MgL = (\frac{1}{3}ML^2 + ML^2)\cdot\alpha_{\gamma\omega\nu} = \frac{4}{3}ML^2\cdot\alpha_{\gamma\omega\nu} \Leftrightarrow \alpha_{\gamma\omega\nu} = \frac{9}{8}\frac{g}{L}$$

Την ίδια στιγμή ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής της ράβδου κατά τον άξονα περιστροφής της είναι:

$$\frac{dL_1}{dt} = \mathrm{I}_1\cdot\alpha_{\gamma\omega\nu} \Leftrightarrow \frac{dL_1}{dt} = \frac{1}{3}ML^2\cdot\frac{9}{8}\frac{g}{L} \Leftrightarrow \frac{dL_1}{dt} = \frac{3}{8}MgL < Mg\frac{L}{2}$$

Ισχύει ότι: $\frac{dL_1}{dt} = \frac{3}{8}MgL < Mg\frac{L}{2}$ αφού στη ράβδο εκτός από το βάρος της ασκείται και η δύναμη από τη σφαίρα

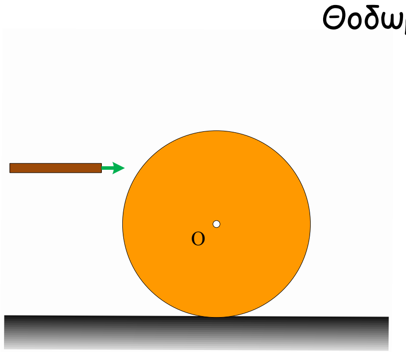
Δ) Τη στιγμή όπου το σύστημα ράβδος-σφαίρα διέρχεται από την οριζόντια θέση, ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής της σφαίρας κατά τον άξονα περιστροφής της ράβδου είναι:

$$\frac{dL_2}{dt} = \frac{d(m\upsilon L)}{dt} = mL\frac{d\upsilon}{dt} = mL\frac{d(\omega L)}{dt} = mL^2\frac{d\omega}{dt} = mL^2\cdot\alpha_{\gamma\omega\nu} = mL^2\cdot\frac{9}{8}\frac{g}{L} \Leftrightarrow \frac{dL_2}{dt} = \frac{9}{8}MgL$$

Ισχύει ότι: $\frac{dL_2}{dt} = \frac{9}{8}MgL > MgL$ αφού στη σφαίρα εκτός από το βάρος της ασκείται και η δύναμη από τη ράβδο.

Προφανώς ισχύει ότι: $\left[\frac{dL_{o\lambda}}{dt}\right]_{\max} = \frac{dL_1}{dt} + \frac{dL_2}{dt}$

5) Μπάλα μπιλιάρδου που θεωρείται σφαίρα μάζας M ακτίνας R, ηρεμεί σε οριζόντιο δάπεδο. Χτυπάμε ακαριαία τη μπάλα σε ύψος h=2R/5 πάνω από το κέντρο μάζας της, οπότε αποκτά ορμή p. Να δείξετε ότι η μπάλα ακαριαία αρχίζει να κυλά χωρίς να ολισθαίνει.



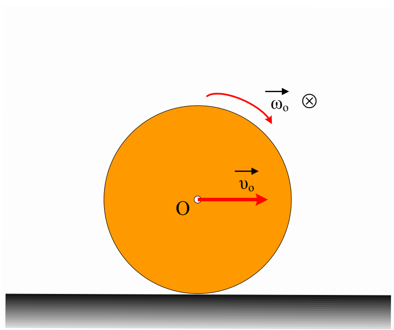
Δίνεται η ροπή αδράνειας σφαίρας ως προς μια διάμετρό της: $I=(2/5)MR^2$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Επειδή το χτύπημα (ώθηση) δεν περνά από το κέντρο μάζας η μπάλα θα εκτελέσει **σύνθετη** κίνηση, η οποία εξετάζεται ως επαλληλία μιας μεταφορικής και μιας περιστροφικής κίνησης γύρω από νοητό άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας της. Το κέντρο μάζας αμέσως μετά το χτύπημα αποκτά αρχική ταχύτητα:

$$p = M\upsilon_o \Rightarrow \upsilon_o = \frac{p}{M},$$

ενώ ταυτόχρονα η μπάλα αποκτά αρχική γωνιακή ταχύτητα:

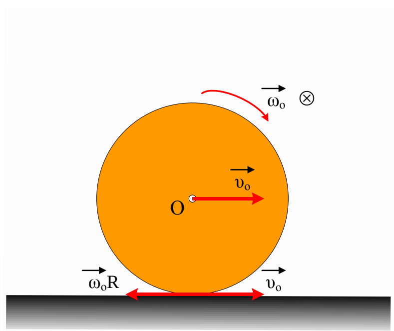


$$\Sigma F = F = \frac{\Delta p}{\Delta t} \Leftrightarrow \Delta p = F\cdot\Delta t \Leftrightarrow p - 0 = F\cdot\Delta t \Leftrightarrow p = F\cdot\Delta t$$

$$\Sigma\tau = \frac{\Delta L}{\Delta t} \Leftrightarrow \Delta L = \Sigma\tau\cdot\Delta t \Leftrightarrow L - 0 = Fh\cdot\Delta t \Leftrightarrow L = Fh\cdot\Delta t$$

$$\frac{p}{L} = \frac{1}{h} \Leftrightarrow L = ph \Leftrightarrow I\omega_o = ph \Leftrightarrow \omega_o = \frac{ph}{\frac{2}{5}MR^2} \Leftrightarrow \omega_o = \frac{5ph}{2MR^2}$$

$$\Rightarrow \omega_o = \frac{5p\frac{2R}{5}}{2MR^2} \Rightarrow \omega_o = \frac{p}{MR}$$



Το σημείο επαφής σφαίρας δαπέδου έχει αρχική ταχύτητα:

$$\upsilon = \upsilon_o - \omega_o R = \frac{p}{M} - \frac{p}{MR}R \Rightarrow \upsilon = 0$$

Άρα η μπάλα ακαριαία αρχίζει να κυλά χωρίς να ολισθαίνει.

Θοδωρής Παπασγουρίδης

papasgou@gmail.com